Schriften der Sudetendeutschen Akademie
der Wissenschaften und Künste
Band 37
Forschungsbeiträge der Naturwissenschaftlichen Klasse

RUDOLF FRITSCH

Eulers Dreiecksproblem mit Zirkel, Lineal und Kegelschnitt

Zusammenfassung

Im allgemeinen Fall führt Eulers Dreiecksproblem algebraisch auf eine Gleichung 3. Grades und ist damit nicht mit Zirkel und Lineal geometrisch lösbar. Mit Zirkel und Lineal erhält man in der konstruktiven Geometrie nur Kreise und Geraden. Dynamische Geometriesoftware ermöglicht zusätzlich die Konstruktion von Kegelschnitten, zum Beispiel aus fünf Punkten. Es wird gezeigt, dass damit Eulers Problem konstruktiv gelöst werden kann.

Summary

Euler's triangle problem by means of ruler, compass and conic section

Euler's triangle problem leads algebraically to an equation of third degree and therefore it is not solvable by means of construction by ruler and compass. Ruler and compass allow the drawing of lines and circles. Interactive geometry software allows moreover the drawing of conics sections, for example from five given points. It will be shown that Euler's problem can be solved constructibly by means of this tool.

Einleitung

Seit der Antike fragen die Geometer, welche Konstruktionsaufgaben mit Zirkel und Lineal lösbar sind. Erst im 19. Jahrhundert war klar, dass die drei klassischen Probleme Quadratur des Kreises, Dreiteilung des Winkels und Verdopplung des Würfels nicht auf diese Weise gelöst werden können. Dies wurde durch Übersetzung der geometrischen Aufgabenstellung in die Algebra geleistet. Mit Zirkel und Lineal kann nur konstruiert werden, was sich algebraisch auf das Lösen von linearen und quadratischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten zurückführen lässt. Ferdinand Lindemann (1852 – 1939) hat 1882 bewiesen, dass die Kreiszahl π transzendent ist, das heißt, keiner algebraischen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten irgendeines Grades genügt [7]. Das zeigt die Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises. Die beiden anderen genannten Probleme führen algebraisch auf Gleichungen dritten Grades.

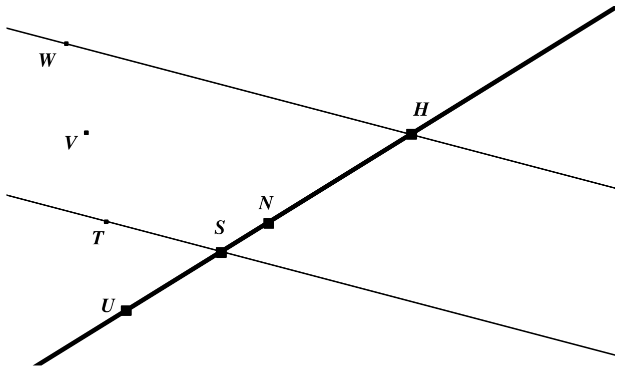
Kegelschnitte werden algebraisch durch quadratische Gleichungen beschrieben. Die Schnittpunkte von zwei Kegelschnitten ergeben sich im Allgemeinen aus Gleichungen vierten Grades. Wenn man zusätzlich zu Kreisen beliebige Kegelschnitte konstruieren kann, so sollte man Konstruktionsaufgaben lösen können, die algebraisch auf Gleichungen bis zum vierten Grad führen.
Die gängigen Programme zur dynamischen Geometrie erlauben die Konstruktion von Parabeln aus Brennpunkt und Direktrix, sowie die Konstruktion von beliebigen Kegelschnitten aus fünf Punkten. Nikolaos Dergiades hat gezeigt, dass sich tatsächlich die Lösungen von Gleichungen dritten und vierten Grades als Schnittpunkte von Parabeln gewinnen lassen, deren Brennpunkt und Direktrix konstruierbar sind [3]. Insbesondere erhält man so die Dreiteilung des Winkels und die Verdoppelung des Würfels. Für die folgenden Überlegungen verwenden wir die dynamische Geometriesoftware CABRI. Sie besitzt zusätzlich zu dem Verbinden von zwei Punkten durch eine Gerade und das Zeichnen eines Kreises mit einem gegebenen Punkt als Mittelpunkt und einem zweiten Punkt als Kreispunkt Befehle – sogenannte Makros – die einige Konstruktionsschritte zusammenfassen, wie zum Beispiel in den Zirkel nehmen einer Strecke, Spiegelungen, Lot errichten oder fällen, Parallelen zeichnen und so fort. Außerdem gibt es Makros, die das Spektrum der Konstruktionen mit Zirkel und Lineal erweitern: das Zeichnen eines Kegelschnittes durch 5 Punkte und die Konstruktion einer Parabel aus Brennpunkt und Direktrix.
Wir betrachten Eulers Dreiecksproblem, dessen Pate ist Leonhard Euler (1703 – 1783). Es verlangt die Konstruktion eines Dreiecks, von dem der Höhenschnittpunkt, der Umkreismittelpunkt und der Inkreismittelpunkt gegeben sind. Wir zeigen im letzten Abschnitt, dass das Problem algebraisch auf eine Gleichung dritten Grades führt, also nicht mit Zirkel und Lineal lösbar ist. Folgend den Überlegungen von Roger C. Alperin [2] erhalten wir die Ecken des gesuchten Dreiecks geometrisch als Schnittpunkt des Umkreis und der Feuerbach-Hyperbel, die beide zuvor konstruiert werden können. Die Hyperbel gewinnen wir aus fünf Punkten.
Die hier beschriebenen mathematischen Ergebnisse sind nicht neu; sie werden nur unter einem anderen Gesichtswinkel betrachtet.

Einstieg in Eulers Problem

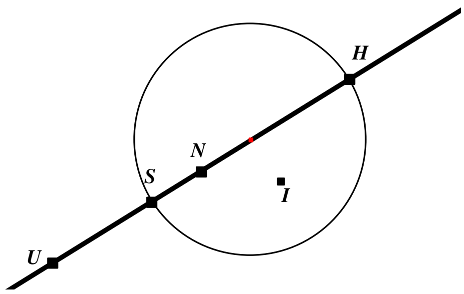
Gegeben seien Punkte H, U und I in der Euklidischen Ebene. Gesucht ist ein Dreieck ABC mit H als Höhenschnittpunkt, U als Umkreismittelpunkt und I als Inkreismittelpunkt. Ein solches Dreieck besitzt die Gerade UH als Eulergerade, die den Schwerpunkt S und den Mittelpunkt des Feuerbachkreises N[1] des Dreiecks enthält. Beide Punkte sind innere Punkte der Strecke $[UH]$. Der Schwerpunkt S teilt die Strecke im Verhältnis 1:2, das heißt, $\overline{US} : \overline{SH} = 1 : 2$, und N ist der Mittelpunkt dieser Strecke. Die Punkte S und N können leicht mit Zirkel und Lineal konstruiert werden. Mit CABRI geht dies folgendermaßen: Den Punkt N erhält man direkt mit

[1] Die Bezeichnung N stammt daher, dass der Feuerbachkreis häufig als Neunpunktekreis bezeichnet wird. Der Buchstabe F wird für den später zu beschreibenden Feuerbachpunkt reserviert. Der *Feuerbachkreis* ist definiert als der Umkreis des von den Mittelpunkten der Seiten des Ausgangsdreiecks gebildeten Dreiecks.

dem Makro „Mittelpunkt“. Zur Konstruktion von S wählt man einen beliebigen Punkt T außerhalb[2] der Eulergeraden und spiegelt den Punkt U an diesem Punkt. Am erhaltenen Punkt V spiegelt man den Punkt T und erhält einen Punkt W. Der Punkt S ist dann der Schnittpunkt der Parallelen zur Geraden WH durch den Punkt T mit der Eulergeraden UH.



Eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit des Problems ist nun, dass der Punkt I innerhalb des Thaleskreises über der Strecke $[SH]$, also des Kreises mit dem Durchmesser $[SH]$, liegt ([6], Theorem 1).



Es bezeichne R den Umkreisradius und r den Inkreisradius. Die folgenden Beziehungen werden Leonhard Euler und Karl Wilhelm Feuerbach (1800 – 1834) zugeschrieben:

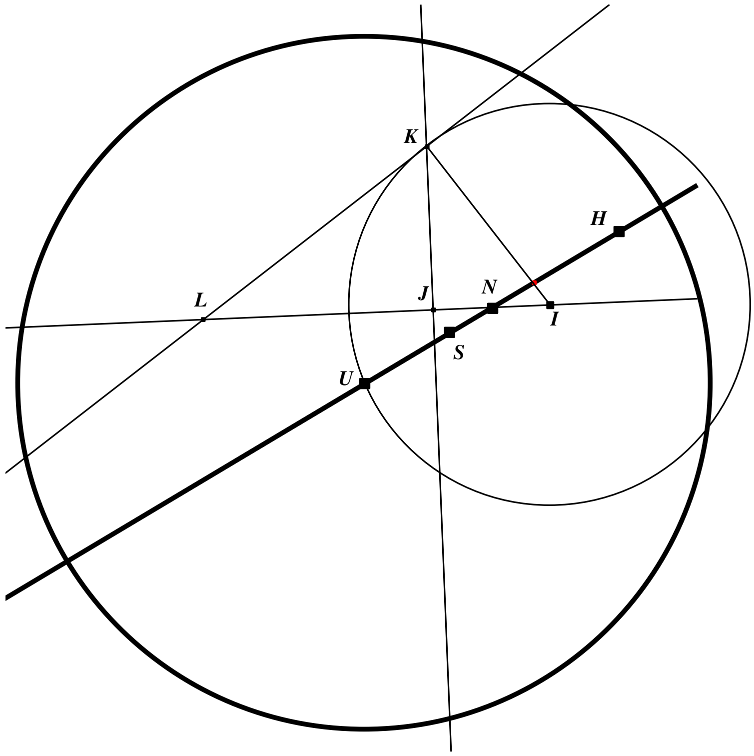
$$\overline{UI}^2 = R \cdot (R - 2r)$$
$$2 \cdot \overline{NI} = R - 2r$$

woraus folgt

$$\overline{UI}^2 = 2 \cdot R \cdot \overline{NI}.$$

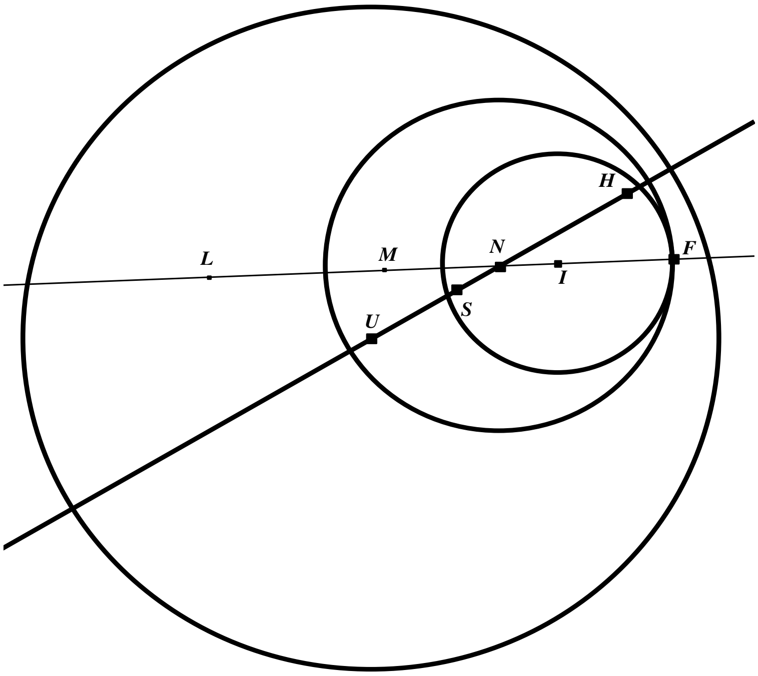
[2] Die Wahl eines beliebigen Punktes ist – streng genommen – bei Konstruktionen mit Zirkel und Lineal nicht erlaubt. Man sollte sich einen solchen Punkt T auch durch Konstruktion verschaffen, was folgendermaßen möglich wäre: Man errichtet in U das Lot auf die Gerade UH und schneidet es mit dem Kreis um den Punkt U durch den Punkt H. Man erhält zwei Schnittpunkte und nimmt als Punkt T den Schnittpunkt, für den der rechte Winkel $\angle HUT$ positiv orientiert ist.

Da die Strecken $\overline{UI}$ und $\overline{NI}$ bekannt sind, kann man mithilfe von Euklids Kathetensatz den Umkreisradius R und damit sowohl den Umkreis als auch den Feuerbachkreis des gesuchten Dreiecks konstruieren, dessen Radius gleich $R/2$ ist.



Zunächst spiegelt man den Punkt I am Punkt N und erhält einen Punkt J mit $\overline{IJ} = 2 \cdot \overline{NI}$. Dann schneidet man das im Punkt J auf die Gerade NI errichtete Lot mit dem Kreis mit Mittelpunkt U und Radius $\overline{UI}$. Von den beiden Schnittpunkten nimmt man als Punkt K den Punkt, für den der Winkel $\angle IJK$ positiv orientiert ist. Nun schneidet man noch das im Punkt K auf die Gerade IK errichtete Lot mit der Geraden NI und erhält einen Punkt L. Das rechtwinklige Dreieck IKL hat eine Kathete der Länge $\overline{UI}$ und der zugehörige Hypotenusenabschnitt hat die Länge $2 \cdot \overline{NI}$. Nach dem Kathetensatz hat deshalb die Hypotenuse $[IL]$ des Dreiecks die Länge R. Man erhält nun den Umkreis des gesuchten Dreiecks als Kreis mit Mittelpunkt U und Radius R.
Nun sei M der Mittelpunkt der Strecke $[IL]$. Dann ist die Länge $\overline{MI}$ der Radius des Feuerbachkreises, also des Kreises mit Mittelpunkt N und Radius $\overline{MI}$. Die Benennung nach Feuerbach rührt daher, dass Karl Wilhelm Feuerbach in seiner Dissertation [4] den tiefliegenden Satz bewiesen hat, dass sich Feuerbachkreis und Inkreis des Ausgangsdreiecks berühren. Der Berührpunkt wird *Feuerbachpunkt* genannt

und ist der Schnittpunkt *F* des Strahles [*NI*] mit dem Feuerbachkreis[3]. Damit ergibt sich auch der Inkreis des gesuchten Dreiecks als Kreis mit Mittelpunkt I durch den Feuerbachpunkt *F*.

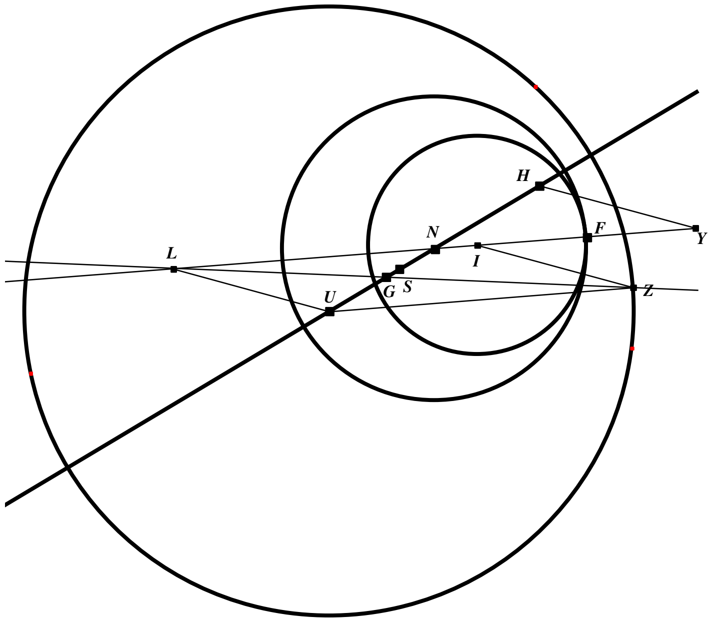


Feuerbachhyperbel

Das sogenannte *Poncelet-Büschel*[4] ist die Gesamtheit der Kegelschnitte durch die Ecken und den Höhenschnittpunkt eines nicht rechtwinkligen Dreiecks [1]. Es handelt sich um gleichseitige Hyperbeln mit dem Mittelpunkt auf dem Feuerbachkreis. Für rechtwinklige Dreiecke definiert man das Poncelet-Büschel als die Gesamtheit der Mittelpunktskegelschnitte durch die Ecken des Dreiecks mit dem Mittelpunkt auf dem Feuerbachkreis. Als *Feuerbachhyperbel* bezeichnet man die Hyperbel des Büschels, deren Mittelpunkt der Feuerbachpunkt ist; sie enthält auch den Inkreismittelpunkt I und besitzt die Gerade *UI* als Tangente [2].
Mit diesen Angaben lässt sich die Feuerbachhyperbel des gesuchten Dreiecks aus den bereits gewonnenen Objekten mithilfe von CABRI konstruieren. Man hat zunächst die Punkte *I* und *H* als Punkte der Feuerbachhyperbel, dann aber auch ihre

[3] Für gleichseitige Dreiecke ist der Feuerbachpunkt nicht definiert, da bei einem solchen Inkreis und Feuerbachkreis zusammenfallen. Gleichseitige Dreiecke können wir jedoch bei unseren Betrachtungen ausschließen. Eulers Problem hat nur dann Sinn, wenn die gegebenen Punkt *U* und *H* verschieden sind. Das bedeutet, dass das gesuchte Dreieck nicht gleichseitig sein kann.
[4] Pate ist der französische Mathematiker Jean-Victor Poncelet (1788 – 1867).

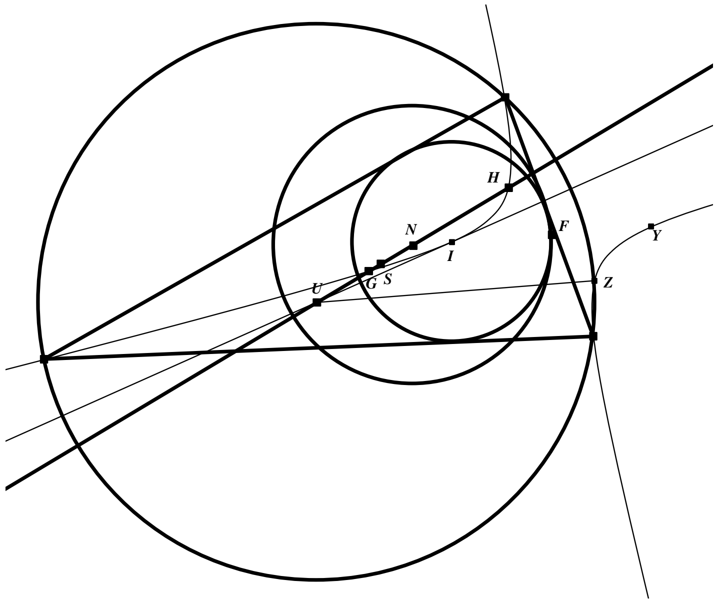
Spiegelpunkte *Y* und *Z* unter der Spiegelung am Hyperbelmittelpunkt *F*. Da die zentrische Streckung mit Zentrum *H* und Faktor 2 den Feuerbachkreis in den Umkreis überführt, liegt der Punkt *Z* auf dem Umkreis; Alperin nennt diesen Punkt *Umkreispunkt* der Feuerbachhyperbel [2]. Die Gerade *NF* = *LI* ist die Mittelparallele im Dreieck *UZH* und es gilt $\overline{LI} = R = \overline{UZ}$. Also ist das Viereck *UZIL* ein Parallelogramm; insbesondere folgt *IZ* || *UL*.



Nun benötigt man noch einen fünften Punkt. Den findet man nach Gaskin (1810 – 1867) [5, S.39, Cor.6] mithilfe eines Sonderfalls der Umkehrung des Satzes von Pappos-Pascal[5], die besagt: *Sind die Schnittpunkte der drei Paare von Gegenseiten eines Sechsecks kopunktal, so liegen die Ecken auf einem Kegelschnitt.* Die Gerade, die die Schnittpunkte enthält, heißt *Pascalgerade* des Sechsecks. In dem hier benötigten Sonderfall geht man nun davon aus, dass zwei Ecken des Sechsecks im Punkt *I* zusammenfallen und die „Verbindungsgerade“ dieser Ecken eine Tangente an den Kegelschnitt ist. Man sucht einen weiteren Punkt *G* des Kegelschnitts auf der Eulergeraden, die damit auch eine Seite des Sechsecks wird. Das entstehende Sechseck sei *HYIIZG* mit den Gegenseitenpaaren (*HY*,*IZ*), (*YI*,*ZG*) und (*II*=*UI*,*GH*). Die Geraden *HY* und *IZ* sind parallel. Ihr Schnittpunkt ist der uneigentliche Punkt zu dem Parallelbüschel, das die Geraden *HY*, *IZ* und *UL* enthält. Da die gewünschte Tangente *UI* und die Eulergerade *GH* sich im Punkt *U* schneiden, ist *UL* die Pascalgerade des gesuchten Sechsecks. Sie schneidet die Gerade *YI* im Punkt *L*, der auf

[5] Die Paten sind der hellenistische Mathematiker Pappos von Alexandria (4. Jahrhundert n. Chr.) und der französische Philosoph Blaise Pascal (1623 – 1662).

der Geraden *ZG* liegen muss. Also ist der gesuchte Punkt *G* der Schnittpunkt der Geraden *LZ* und der Eulergeraden *UH*.
Nun erhält man mit dem CABRI-Makro „Kegelschnitt aus fünf Punkten“ die Feuerbachhyperbel als Umkegelschnitt des Fünfecks HYIZG. Sie schneidet den Umkreis im Allgemeinen in drei vom Umkreispunkt Z verschiedenen Punkten, den Ecken des gesuchten Dreiecks.



Alperin [2] diskutiert noch den Sonderfall, in dem die Feuerbachhyperbel den Umkreis berührt, also der Umkreispunkt mit einer Ecke des gesuchten Dreiecks zusammenfällt. Das ist für die hier vorgestellten Überlegungen nicht relevant. Es bleibt auch offen, ob Umkreis und Hyperbel sich in zwei Punkten berühren.

Algebra

Hier soll gezeigt werden, dass Eulers Problem im allgemeinen Fall auf eine Gleichung dritten Grades führt, also nicht mit Zirkel und Lineal allein lösbar ist. Dazu wird die Gleichung der Feuerbachhyperbel aufgestellt und nach gemeinsamen Lösungen mit der Gleichung des Umkreises gesucht. Ein kartesisches Koordinatensystem wird so gewählt, dass der Punkt U im Ursprung liegt, also $U = (0,0)$, und der Punkt H gegeben ist durch $H = (0,6)$. Dann ergibt sich $S = (0,2)$ und $N = (0,3)$. Der Kreis mit Durchmesser $[SH]$ wird durch die Gleichung $x^2 + (y\text{-}4)^2 = 4$ beschrieben. Da der Inkreismittelpunkt $I = (x_i,y_i)$ im Inneren dieses Kreises liegen muss, gilt $x_i^2 + (y_i\text{-}4)^2 < 4$; Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man noch $x_i > 0$ annehmen. Man rechnet

$$R = \frac{x_i^2+y_i^2}{2\sqrt{x_i^2+(y_i-3)^2}}.$$

Damit erhält man die Gleichungen des Umkreises

$$x^2 + y^2 = \frac{\left(x_i^2 + y_i^2\right)^2}{4(x_i^2 + (y_i - 3)^2)}$$

und des Feuerbachkreises

$$x^2 + (y-3)^2 = \frac{\left(x_i^2+y_i^2\right)^2}{16\left(x_i^2+(y_i-3)^2\right)}.$$

Die Gerade *NI* hat die Gleichung

$$(y_i - 3)\, x - x_i\, y + 3x_i = 0.$$

Es folgt für den Feuerbachpunkt

$$F = \left(\frac{x_i(x_i^2+y_i^2)}{4(x_i^2+(y_i-3)^2)}, \frac{(y_i+9)\left(x_i^2+y_i^2\right)-36(2y_i-3)}{4(x_i^2+(y_i-3)^2)}\right)$$

und für den Umkreispunkt

$$Z = \left(\frac{x_i(x_i^2+y_i^2)}{2(x_i^2+(y_i-3)^2)}, \frac{(y_i-3)\left(x_i^2+y_i^2\right)}{2(x_i^2+(y_i-3)^2)}\right).$$

Für die Gleichung der Feuerbachhyperbel machen wir den allgemeinen Ansatz

$$ax^2 + bxy - ay^2 + cx + dy = 6.$$

Dass die Koeffizienten der rein quadratischen Glieder sich nur um das Vorzeichen unterscheiden, liegt an der Gleichseitigkeit der Feuerbachhyperbel; die Konstante 6 kann angenommen werden, weil zu erwarten ist, dass der Umkreismittelpunkt nicht auf der Feuerbachhyperbel liegt.

Dass die Punkte H, I und Z auf der Hyperbel liegen, liefert die Gleichungen

$$\begin{gathered} -6a + d = 1 \\ (x_i^2 - y_i^2)a + x_i y_i b + x_i c + y_i d = 6 \\ (x_i^2 - (y_i - 3)^2)(x_i^2 + y_i^2)^2 a + x_i(y_i - 3)(x_i^2 + y_i^2)^2 b + \\ + x_i(x_i^2 + y_i^2)wc + (y_i - 3)(x_i^2 + y_i^2)wd = 6w^2, \end{gathered}$$

wobei zur Abkürzung

$$w = 2(x_i^2 + (y_i - 3)^2)$$

gesetzt ist.

Nun soll noch die Gerade *UI* mit der Gleichung

$$y_i x = x_i y$$

die Hyperbel im Punkt *I* berühren. Die Substitution $y = y_i x/x_i$ in die Hyperbelgleichung und Multiplikation mit x_i^2 liefert

$$((x_i^2 - y_i^2)a + x_i y_i b)x^2 + (x_i^2 c + x_i y_i d)x = 6x_i^2.$$

Die zweite des obigen Blocks von drei Gleichungen erlaubt die folgende Vereinfachung:

$$(6 - x_i c + y_i d)x^2 + (x_i^2 c + x_i y_i d)x - 6x_i^2 = 0.$$

Die geforderte Berühreigenschaft liefert das Verschwinden der Diskriminante

$$(x_i c + y_i d - 12)^2\, x_i^2$$

dieses Polynoms in der Unbestimmten x. Also muss gelten

$$x_i c + y_i d = 12.$$

Damit hat man vier lineare Gleichungen für die vier Koeffizienten der Hyperbel. Dieses Gleichungssystem hat die Lösung

$$a = \frac{2(y_i - 3)}{x_i^2 + y_i^2},\ b = \frac{4(y_i^2 - x_i^2 - 3y_i)}{x_i(x_i^2 + y_i^2)},$$

$$c = \frac{(12 - y_i)x_i^2 + (36 - 12y_i - y_i^2)y_i}{x_i(x_i^2 + y_i^2)},\ d = \frac{x_i^2 + y_i^2 + 24y_i - 36}{x_i^2 + y_i^2}.$$

Also kann man die Gleichung der Feuerbachhyperbel in der Form

$$2x_i(y_i - 3)(x^2 - y^2) + 4(y_i^2 - x_i^2 - 3y_i)xy + ((12 - y_i)\, x_i^2 + (36 - 12y_i - y_i^2)\, y_i)x + \\ + (x_i^2 + y_i^2 + 24y_i - 36)y = 6x_i(x_i^2 + y_i^2)$$

schreiben.

Nun hat man diese Feuerbachhyperbel mit dem Umkreis zu schneiden. Elimination der Ordinate y führt auf eine Gleichung vierten Grades für die Abszissen der Schnittpunkte. Ein Schnittpunkt ist bekannt, der Feuerbachpunkt. Es bleibt eine Gleichung dritten Grades, deren Lösungen die Abszissen der Ecken des gesuchten Dreiecks sind. Das alles ist mithilfe eines Computeralgebrasystems leicht machbar, liefert aber komplizierte Formeln ohne zusätzliche Einsicht. Deshalb wird im Folgenden nur ein numerisches Beispiel dargestellt.

Es sei $x_i = 1$ und $y_i = 5$ gesetzt. Die Bedingung $1^2 + (5 - 4)^2 < 4$ ist erfüllt. Das ergibt für den Umkreis

$$x^2 + y^2 - 33{,}9 = 0,$$

für den Umkreispunkt $Z = (2{,}6|5{,}2)$ und für die Feuerbachhyperbel

$$7(x^2 - y^2) + 18xy - 119x + 55y = 78.$$

In dieser Gleichung wird y^2 durch $33{,}9 - x^2$ ersetzt und dann nach dem nur noch linear auftretenden y aufgelöst:

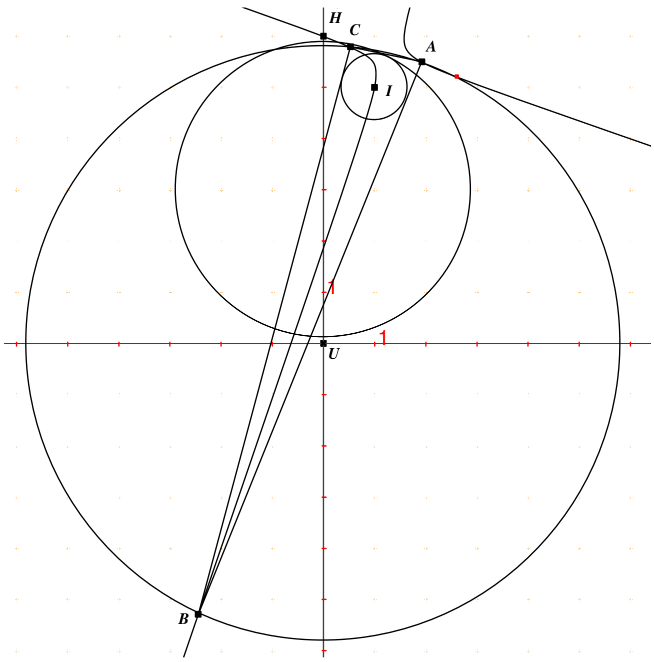
$$y = \frac{1573 + 595x - 70x^2}{275 + 90x}.$$

Wenn man diesen Wert in die Umkreisgleichung einsetzt und faktorisiert, erhält man

$$\frac{26}{25} \cdot \frac{(5x - 13)(100x^3 - 495x + 242)}{(18x + 55)^2}.$$

Der Term $5x - 13$ liefert – wie erwartet – die Abszisse des Feuerbachpunktes. Die Wurzeln des irreduziblen Polynoms $100x^3 - 495x + 242$ sind die Abszissen der Ecken des gesuchten Dreiecks. Die Diskriminante 32702670000 dieses Polynoms ist positiv, also liegt der *casus irreducibilis* vor, mit drei reellen Wurzeln, deren Radikaldarstellung komplexe Zahlen benötigt. Reelle Näherungswerte sind $x_1 = 1{,}921$, $x_2 = -2{,}438$ und $x_3 = 0{,}517$. Damit ergeben sich die Ecken des gesuchten Dreiecks zu

$$A = (1{,}921|5{,}487),\ B = (-2.438|-5{,}284),\ C = (0{,}517|5{,}791).$$



Literatur

[1] Alperin RC. The Poncelet Pencil of Rectangular Hyperbolas. *Forum Geometricorum* 2010; 10:15-20

[2] Alperin RC Solving Euler's Triangle Problems with Poncelet's Pencil. *Forum Geometricorum* 2011*;*11:121-129

[3] Dergiades N. Geogebra Construction of the Roots of Quadratic, Cubic and Quartic Equations. *Forum Geometricorum* 2016;16:29-35

[4] Feuerbach KW. Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren. Dissertation. Riegel und Wießner, Nürnberg 1822

[5] Gaskin T. *The Geometrical Construction of a Conic Section Subject to Five Conditions of Passing through Given Points and Touching Given Straight Lines with a Variety of Curves of the Second Order*. John Deighton, Cambridge, 1852

[6] Guinand AP. Tritangent Centers, and Their Triangles. *American Mathematical Monthly* 1984;91/5:290-300

[7] Lindemann F. Ueber die LUDOLPH'sche Zahl. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* 1882/2, 679-682