

Schriften der Sudetendeutschen Akademie
der Wissenschaften und Künste
Band 34
Forschungsbeiträge
der Naturwissenschaftlichen Klasse

Seiten 65 - 96

VOLKER OPPITZ

Mathematik und Betriebswirtschaftslehre

„Jede mathematische Formel in meinen Büchern halbiert die Verkaufszahlen.“¹

Zusammenfassung

Mathematik sei das Krönungsmerkmal jeder naturwissenschaftlichen Disziplin. Fachwissenschaftler sehen das als Aufforderung, Formeln in ihren Schriften aufblitzen zu lassen. Wiewohl das löblich ist, erfordert dies die Aufdeckung quantitativer Interaktionen im bearbeiteten Forschungsgegenstand. An betriebswirtschaftlichen Praxisfällen zeigt der Beitrag, wie durch Deduktion oder Induktion mathematische Abbildungen zu gewinnen sind.

Summary

Mathematics and Business

Mathematics is said to be the crowning feature of every scientific discipline. Scientists interpret this as an exhortation to embellish their publications with mathematical formulas. Although this is commendable, it means that quantitative interactions must be identified in the subject of their research. By reference to practical examples in business economics, the article shows how mathematical representations can be derived by deduction or induction.

Anliegen

Wozu und wofür Mathematik in der Betriebswirtschaft? Welchen Stellenwert besitzt sie für die Forschung? Hilft sie, Wirtschaftsverläufe zu erklären, Entscheidungen zu optimieren und Prozesse zu verbessern? Bei Dissertationen spielen Regeln eine Rolle: Wurde *ordentlich* gegliedert, *genau zitiert* usw. Das gehört zum Bedingungsgefüge. Maßstab aber ist die wissenschaftliche Neuheit, denn „Das Doktorwerden ist eine Konfirmation des Geistes.“².

¹ Zitat des Astrophysikers Stephen Hawking. In: Kulke, S. 28. [19]

² Lichtenberg, S. 96. [20]

An Forschungsthemen mangelt es nicht: „... überall tut sich irgendwo ein Problem auf, im häuslichen Leben wie im Beruf, in der Wirtschaft wie in der Technik, in der Kunst wie in der Wissenschaft. Und manche Probleme haben etwas Hartnäckiges an sich; sie lassen uns nicht los, und die quälenden Gedanken an sie können ... uns ... sogar nachts den Schlaf rauben“.³

Die Schwierigkeit, neue Erkenntnisse einzuführen, besteht nicht nur im Erkenntnisgewinn und im Wohlmeinen von Experten, sondern im Nachweis ihrer Plausibilität. Bezüglich seiner Dissertation befindet Planck: Ihr „Eindruck ... in der damaligen physikalischen Öffentlichkeit war gleich Null. ... *Helmholtz* hat diese Schrift wohl überhaupt nicht gelesen, *Kirchhoff* lehnte ihren Inhalt ausdrücklich ab mit der Bemerkung, dass der Begriff der Entropie ... nicht auf irreversible Prozesse angewendet werden dürfe. An *Clausius* gelang es mir nicht heranzukommen, auf Briefe antwortete er nicht Mit *Carl Neumann* in Leipzig führte ich eine Korrespondenz, die völlig ergebnislos verlief.“⁴ Das heißt: „Eine neue wissenschaftliche Wahrheit pflegt sich nicht in der Weise durchzusetzen, dass ihre Gegner überzeugt werden und sich als belehrt erklären, sondern dadurch, dass die Gegner allmählich aussterben und die heranwachsende Generation von vornherein mit der Wahrheit vertraut gemacht ist.“⁵

Mathematik bietet für das Abbilden wirtschaftlicher Bewegungsgesetze „... mit der Algebra, ... der Differential- und Integralrechnung, um nur einiges zu nennen!“⁶ vielfältige Möglichkeiten, „... gehört zu den ältesten Wissenschaften der Welt“⁷ und ist „... das Instrument, welches die Vermittlung bewirkt zwischen Theorie und Praxis, zwischen Denken und Beobachten: Sie baut die verbindende Brücke und gestaltet sie immer tragfähiger“⁸. Das deduktive Erlangen mathematischer Lösungswege setzt betriebswirtschaftliches Wissen voraus, um bekannte Gesetzmäßigkeiten als quantitative Interaktionen zu erkennen und mit ihren Variablen darzustellen, und die Befähigung, mathematische Beteiligungsfunktionen für die Approximation empirischer Verteilungen zu finden, die ausreichende Übereinstimmungen aufweisen. Das ist aus theoretischer Sicht die feinste Vorgehensweise „aber die Mathematik im Entstehen erscheint als experimentelle induktive Wissenschaft“⁹, besonders in der Betriebswirtschaft. Deswegen ist Induktion, das plausible Schließen auf allgemeine Gesetzmäßigkeit im Ergebnis der Beobachtung bestimmter betriebswirtschaftlicher Erscheinungen anzuwenden.

Sowohl bei deduktiv als auch induktiv gefundenen mathematischen Abbildungen kommt es auf Praktikabilität an: Die quantitativen Ergebnisse müssen hinreichend genau sein und geeignet, die untersuchten Erscheinungen verständlich zu erklären und deren Wirkungen zu verbessern. Dazu gehören statistisch gefestigte

³ Planck 1952, S. 3. [41]

⁴ Planck 1948, S. 10. [40]

⁵ Planck 1948, S. 16/17. [40]

⁶ Mann, S. 119. [21]

⁷ Fritsch, S. 9. [10]

⁸ Kreck, S. N1. [18]

⁹ Polya 2010, S. 9. [43]

Daten und eine für betriebswirtschaftliche Berechnungen geeignete Mathematik-Software¹⁰.

Die betriebswirtschaftliche Forschung befasst sich mit Wertschöpfung, Befriedigung der Lebensbedürfnisse, Gütertausch und Arbeitsteilung. Qualitative Entwicklungen fördern die Herausbildung quantitativer Strukturen und verstärken die Notwendigkeit, die Interaktionen unabhängiger und abhängiger Variablen mathematisch abzubilden, wie z.B. mittels Differentialgleichungen [DGL], Gleichungen, Bedienungs- und Spieltheorie, um bei kürzesten Reaktionszeiten¹¹ günstig einzukaufen, rationell zu produzieren und mit Gewinn zu verkaufen. Kant meint, dass „sich eine Wissenschaft erst dann als entwickelt betrachten könne, wenn sie dahin gelangt sei, sich der Mathematik zu bedienen“¹². Wie sieht es damit jetzt aus?

- „Jede mathematische Formel in meinen Büchern halbiert die Verkaufszahlen.“¹³

$$A_q = \frac{A_0}{2 \cdot q}, \text{ wenn } q \geq 1, \text{ sonst } A_0, \begin{cases} A_q \dots \text{Auflage,} \\ q \dots \text{Formelanzahl} \end{cases}$$

Der von der Formelanzahl abhängige Rückgang der Buchauflage weist eine Analogie auf zur ζ -Funktion¹⁴ der Abnahme des Aufwands A_q mit einem Senkungsfaktor: $s = 50 \%$.

- Ein in 3. Auflage erschienenen Buch enthält u.a. seit zwölf Jahren übersehene Fehler:

- „Cash Flow $CF_t = 100$, Renditesatz $r = 7,00 \%$ /a, Preis $P = 50,83 \text{ €}$. Die Duration wird berechnet:

$$\text{Duration} = \frac{\sum_{t=1}^T \frac{t \cdot CF_t}{(1+r)^t}}{P} = \frac{\frac{10 \cdot 100}{1,07^{10}}}{50,83} = \frac{10 \cdot 50,83}{55,83} = 10 \text{ Jahre} \text{ „}^{15}\text{“}$$

Die Nachrechnung ergibt:

$$\text{Duration} = 68,34 \neq 10,00 \neq 9,10 = ? \text{ Jahre.}$$

- „Der einfache Zins während 10 Jahren bei einer normalen Obligation mit 7 % Coupon und zu pari (d.h. zu 100 %) gekauft, errechnet sich aus der Summe aller geleisteten Couponzahlungen, d. h. 10 Jahre lang jährlich 7 %.

$$CF = P_0 \cdot (1+r) \cdot n = 100 \cdot (1+0,07) \cdot 10 = 70 \text{ „}^{16}\text{“ Richtig} \rightarrow CF = 1070,00 \text{ €}$$

Mathematische Verständnisprobleme beruhen kaum auf Fehlern, sondern auf ungenügender Begriffsklarheit bei der Anwendung *deduktiver*, *induktiver* und *rekursiver* Verfahren.

¹⁰ Vgl. Oppitz 2011/2, S. 1/75. [37] Akademie-Mitglieder erhalten die OR_MAT[®]-Programme kostenlos: Prof@Oppitz.de.

¹¹ Die mittlere Haltezeit von Aktien an der Börse beträgt 22 Sekunden, vor kurzem mehr als 4 Jahre (vgl. Zielcke, S. 13). [49]

¹² Gräbe, S. 5. [13] Vgl. auch Müller, S. 14. [23]

¹³ Zitat des Astrophysikers Stephen Hawking. In: Kulke, S. 28. [19]

¹⁴ Vgl. Oppitz 2014. [39]

¹⁵ Gallati, S. 80. [12]

¹⁶ Gallati, S. 27 [DUP]. [12]

Deduktion betriebswirtschaftlicher Interaktionen

Einleitende Betrachtung

Die Deduktion mathematischer Algorithmen setzt für die Beschreibung betriebswirtschaftlicher Interaktionen die unerlässliche „Vernunftkenntnis aus der Konstruktion der Begriffe“¹⁷ voraus. Liegen klare Begriffszuordnungen vor, bieten sich folgende Vorgehensweisen an:

- Herleitung mathematischer Algorithmen aus wirtschaftlichen Gesetzmäßigkeiten, i.d.R. mit DGL, die das Änderungsverhalten der Variablen x und ihrer Funktionen $y = f(x)$ zueinander erfassen, weder deren gegenseitigen Abhängigkeiten noch die Ableitungen der Funktionen y . Sie widerspiegeln Entwicklungsgesetze, um deren Struktur (erkenntnistheoretische Funktion) oder Wirkungen (induktive Funktion) zu erforschen. Grundsätzlich lässt sich jede Funktionsschar mit n Parametern durch eine DGL n -ter Ordnung wiedergeben und umgekehrt. Die allgemeine Form einer DGL n -ter Ordnung und Lösung lauten¹⁸:

$$F(x, y', y'', y''' \dots y^{(n)}) = 0. \text{ Es gilt z. B.: } y' = \frac{dy}{dx}, \text{ und zeitabhängig: } \dot{y} = \frac{dy}{dt},$$

weil die höchste vorkommende Ableitung der gesuchten Funktion n -ter Ordnung ist.¹⁹ Jede DGL hat, wenn überhaupt, unendlich viele Lösungen. Sie heißt in obiger Form *implizit*, nach der höchsten Ableitung aufgelöst *explizit*²⁰:

$$y^{(n)} = F(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n-1)}).$$

- Übernahme einer passenden Funktion gemäß Definitionsbereich [DB] für verwandte Interaktionen i.d.R. durch *Analogieschluss*: Liegen Identitäten vor, ist der Suchvorgang abgeschlossen. Beispiele sind:
 - *Eulersche β -Verteilung*: Jahrhunderte nach Euler fand sie mit dem Polaris-Projekt Eingang in die probabilistische Netzplanung²¹ der Forschung und Entwicklung (1958).
 - *Logistische Funktion* für das Bevölkerungswachstum (Verhulst 1838); sie gehört heute zur betriebswirtschaftlichen Klasse der Schwanenhalsfunktionen²².

Vorstufe der Berechnungen ist die Findung der Beteiligungsfunktion, die betriebswirtschaftliche Bewegungsgesetze als Interaktion beschreibt.

¹⁷ Kant, S. 19. [16]

¹⁸ Eine *allgemeine Lösung* liegt vor, solange der willkürliche Parameter unbestimmt ist.

¹⁹ DGL n -ter Ordnung: Die Ausgangs-DGL enthält n als höchste Potenz und hat n willkürliche Parameter.

²⁰ Es gibt eine abgeschlossene Theorie expliziter gewöhnlicher DGL. In expliziter Form sind sie leicht zu verarbeiten.

²¹ PERT...Program evaluation and review technique, vgl. Oppitz 1995, S. 67 ff. [29]

²² Vgl. Oppitz 1971 [27], Oppitz 2011/2, S. 43 – 46. [36]

Deduktion und Rekursion

Deduktion: Die Hypothese „Kapital ist Mehrwert heckender“²³ Wert²⁴ mit Mehrwert dK/dt , Kapital K , Zeit t und Proportionalitätsfaktor κ wird durch eine DGL 1. Ordnung²⁵ abgebildet:

$$\frac{dK}{dt} = \kappa \cdot K, \quad \int \frac{dK}{K} = \kappa \cdot \int dt, \quad \ln|K| = \kappa \cdot t + C, \quad |K| = e^{\kappa \cdot t} \cdot e^C.$$

Die Übernahme der Anfangsbedingung (1) in die allgemeine Lösung (2) und die Bestimmung des Parameters e^C ergibt die *partikuläre DGL-Lösung*²⁶, die (stetige) Kapitalfunktion (3) $K(t)$:

$$(1) \quad K(t=0) = K_0, \quad (2) \quad K_0 = e^{\kappa \cdot 0} \cdot e^C = e^C, \quad \rightarrow \quad (3) \quad K(t) = K_0 \cdot e^{\kappa \cdot t}.$$

Rekursion: Sind für hinreichend viele unabhängige Variablen $t = 1, 2, \dots$, die abhängigen K_t bekannt, ist jeder weitere Funktionswert berechenbar. Die (diskrete) *Kapitalfunktion* K_t ruft sich so oft selbst auf, bis ein vorgegebenes Argument T erreicht ist und die *Rekursion*²⁷ sich, ausgehend vom Renditezuschlag R , Rendite-satz r und Barkapital K_0 , unterbricht (Abb. 1).

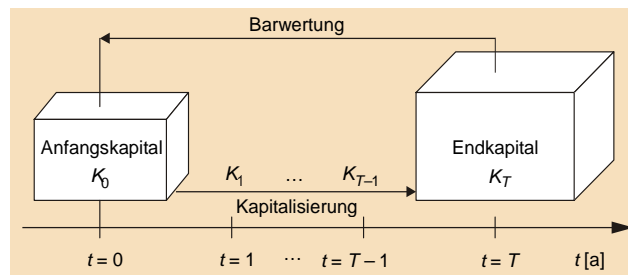


Abbildung 1: Rekursive Kapitalisierung

$$\begin{aligned} R &= r \cdot K_0 \rightarrow K_1 = K_0 + R = K_0 + r \cdot K_0 = K_0 \cdot (1 + r)^1 \\ K_2 &= K_1 + R = K_1 + r \cdot K_1 = K_1 \cdot (1 + r)^1 = K_0 \cdot (1 + r)^2 \\ K_3 &= K_2 + R = K_2 + r \cdot K_2 = K_2 \cdot (1 + r)^1 = K_0 \cdot (1 + r)^3 \\ &\vdots \\ K_T &= K_0 \cdot (1 + r)^T \end{aligned}$$

²³ „Junge zur Welt bringen“. Vgl. Duden, S. 328. [6]

²⁴ Vgl. Marx, K. In „Kreislauf des Geldkapitals“, S. 31/68. [22]

²⁵ Funktionensuche mit einer Veränderlichen, bei partiellen DGL mit mehreren Veränderlichen.

²⁶ Partikuläre DGL-Lösungen beziehen sich auf einen bestimmten Untersuchungsfall.

²⁷ Aus einer einfachen Funktion entstehen Algorithmen, die auf sich selbst verweisen oder analytisch fortschreitend die Quantitäten in Schleifen beschreiben. Die Rekursion verknüpft die berechneten Werte $f(n), f(n-1), \dots$, wie z.B. die Fakultät $n! = (n-1)! \cdot n$. Iteration: Benutzung des rekursiven Funktionsaufrufs nur an den Definitionsrändern der unabhängigen Variablen.

Zwischen stetiger und diskreter Kapitalfunktion besteht folgender Zusammenhang:

$$K(T) = K_0 \cdot e^{\kappa T} = K_T = K_0 \cdot (1+r)^\tau \rightarrow e^\kappa = 1+r \rightarrow \kappa = \ln(1+r) \text{ bzw. } r = e^\kappa - 1.$$

Beispiele der Anwendung der Kapitalisierungsfunktion:

- *Renditesatzwirkung auf die Dauer τ der Kapitalverdopplung:* Renditesätze: $r = 0,03$ (3 %/a), $\tau \rightarrow 23,33$ a, und $r = 0,005$ (0,5 %/a), $\tau \rightarrow 140,00$ a.

$$2 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1+r)^\tau \rightarrow 2 = (1+r)^\tau \rightarrow \tau = \frac{\ln 2}{\ln(1+r)} = \frac{\ln 2}{\kappa} \rightarrow \tau \approx \frac{0,7}{r}.$$

- *Kapitalisierungsdauer τ eines (1) kleinen Kapitals $K_0 = 2307078,60$ € mit hohem Renditesatz $r = 12,75$ %/a ($\kappa = 0,12$ 1/a) bis zum Gleichstand eines (2) hohen Kapitals $K_0 = 7385000,00$ € mit geringem Renditesatz $r = 7,50$ %/a ($\kappa = 0,07232$ 1/a) (Abb. 2):*

$$K_T^1 = K_T^2 \rightarrow K_0^1 \cdot e^{\kappa_1 \cdot \tau} = K_0^2 \cdot e^{\kappa_2 \cdot \tau} \rightarrow \ln K_0^1 + \kappa_1 \cdot \tau = \ln K_0^2 + \kappa_2 \cdot \tau \rightarrow$$

$$\tau \cdot (\kappa_1 - \kappa_2) = \ln K_0^2 - \ln K_0^1 \rightarrow \kappa = \ln(1+r) \rightarrow \tau = \frac{\ln K_0^2 - \ln K_0^1}{\kappa_1 - \kappa_2} = 24,4 [a]$$

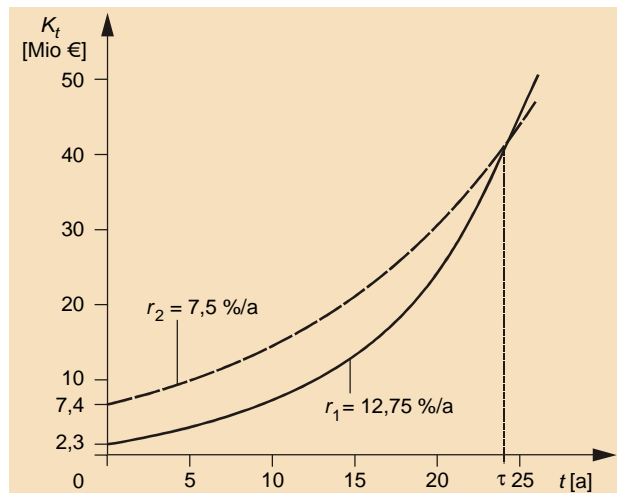


Abbildung 2: Aufholdauer unterschiedlicher Kapitalgrößen

Induktion einer Beteiligungsfunktion

Empirische Verteilung und Funktionssuche

Verteilungen sind gleichmäßig oder ungleichmäßig und erstrecken sich auf endlich viele bzw. abzählbar unendlich viele Elemente²⁸ oder auf ein Kontinuum²⁹. Eine positive Größe M stellt eine Verteilung auf die Menge K_0 (Verteilungsbereich) dar, wenn jeder Teilmenge $K'_0 \leq K_0$ durch eine Beteiligungsfunktion Q ein absoluter Anteil $Q(K'_0)$ von M wie folgt zugeordnet ist: $0 \leq Q(K'_0) \leq 1$, für die Menge K_0 : $Q(K'_0) \leq 1$, für die leere Menge $Q(\emptyset) = 0$. Sind die Teilmengen K'_0 und K''_0 disjunkt, gilt: $Q(K'_0 \cup K''_0) = Q(K'_0) + Q(K''_0)$. Der Parameter q_i der Urliste (Tab. 1) verkörpert den Wert der Beteiligungsfunktion für die aus dem Element x_i gebildete Teilmenge $\{x_i\}$ von K_0 : $q_i = Q(\{x_i\})$ mit den Zuweisungen: $0 \leq q_i \leq 1$ für alle i : $q_1 + q_2 + q_3 + \dots = Q(\{x_1\}) + Q(\{x_2\}) + Q(\{x_3\}) + \dots = Q(K_0) = 1$.

Monat x_i	Betrag m_i [€/Mon.]	Anteil $q_i = m_i/M$ [%/Mon.]
1	5000,00	2,57
2	35200,00	18,07
3	63300,00	32,49
4	69800,00	35,83
5	21500,00	11,04
Summen:	194800,00	100,00

Tabelle 1: Monatsabrechnung für Handwerksleistungen an einem Wohnhaus

Bildlich (Abb. 3) entsteht über den Monaten t ein Nadeldiagramm [1], über Wochen³⁰ ein (Treppen-) Kurvendiagramm [2] und durch Verbindung der Werte q_i eine stetige Kurve [3]³¹.

Bei der Klassenbildung ist die Datenanzahl in den Randklassen q_1, q_k entsprechend DB: $a \leq x \leq b$, zu beachten: [1] DB einseitig unendlich: $a > -\infty, b \rightarrow \infty$: $q_1 \geq 0, q_k \geq 5$, [2] DB endlich: $a > -\infty, b < \infty$: $q_1 \geq 0, q_k \geq 0$, [3] DB unendlich: $a \rightarrow -\infty, b \rightarrow \infty$: $q_1 \geq 5, q_k \geq 5$ (Abb. 4).

²⁸ Eine Menge heißt abzählbar unendlich, wenn jedes Element mit nur einer Nummer versehen werden kann und keine fehlt! Die Glieder x_1, x_2, x_3, \dots des (einfachsten) diskreten Verteilungsbereichs der Größe K_0 können wie eine Folge aufgezählt werden, deren absoluten m_1, m_2, m_3, \dots oder relativen Anteile $q_i = m_i/M$ beschreiben die Verteilung.

²⁹ Ein Kontinuum bezeichnet „das Zusammenhängende“, das ein Intervall, eine Strecke, Fläche, Raumteil usw. sein kann!

³⁰ Die über den Wochen aufgetragenen Rechtecke entsprechen der Addition der vier dazugehörigen Wochenabrechnungen.

³¹ Der Grenzübergang zur stetigen Verteilung erfolgt i. d. R. durch Regressionsanalyse mit der kleinsten Quadratsumme.

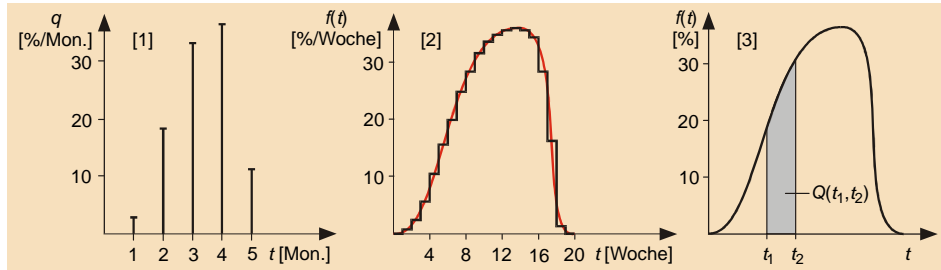


Abbildung 3: Diagramme der Monatsabrechnung für Handwerksleistungen

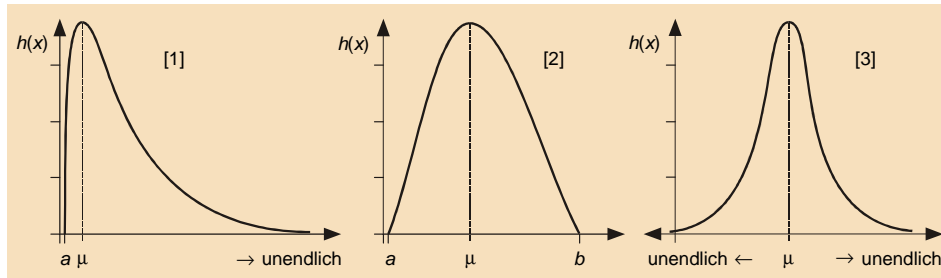


Abbildung 4: DB verschiedener Interaktionen

Betriebswirtschaftlich überwiegen i.d.R. asymmetrische endliche Verteilungen³². Wichtige Kennzahlen für die Auswahl der Beteiligungsfunktionen sind:

- *Arithmetisches Mittel:*

$$\text{unterschiedliche Häufigkeit: } \mu = \frac{x_1 \cdot h_1 + x_2 \cdot h_2 + \dots + x_n \cdot h_n}{h_1 + h_2 + \dots + h_n},$$

$$\text{gleiche Häufigkeit: } \sum_{i=1}^n h_i = n, \quad \mu = \frac{1}{n} \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_n).$$

- *Datenhalbstelle h_s :* mittlere Stelle der Datenreihe: $h_s = \frac{n+1}{2}$.
- *Datenmitte (Zentralwert, Median):* Hälfziger (theoretischer) Merkmalswert, errechnet bei
 - gerader Anzahl n als Mittel der mittleren Merkmalswerte: $\tilde{x} = \frac{1}{2} \cdot \left[x_{\frac{n}{2}} + x_{1+\frac{n}{2}} \right]$,
 - ungerader Anzahl n als mittlerer Merkmalswert: $\tilde{x} = x_{\frac{n+1}{2}}$.

³² Kaum natürliche (biologische, physikalische usw.) Vorgänge, deren Anfang und Ende im Dunkeln liegen. Bei ihnen spielt die Lage eines Gipfelpunktes über der Zeitachse von minus bis plus unendlich eine untergeordnete Rolle.

- **Häufigkeit** h_i : Datenanzahl i [St.], Datenanteil h_i [%]: $N = \sum_{i=1}^n h_i$.
- **Modus** h_M : Häufigster Wert: $h_M = \text{Max}_{1 \leq i \leq n} [h_i]$, wenn $\sum_{i=1}^n h_i > n$.³³
- **Schiefe** (Asymmetrie) und **Mittigkeit** (Symmetrie) der Verteilung³⁴ (Abb. 5):

$$s_c = \mu - x_M \quad \begin{cases} s_c > 0 \rightarrow \text{linkssteil bzw. rechtsschief} \\ s_c < 0 \rightarrow \text{rechtssteil bzw. linksschief} \end{cases} \quad s_c = 0 \rightarrow \text{gerade.}$$

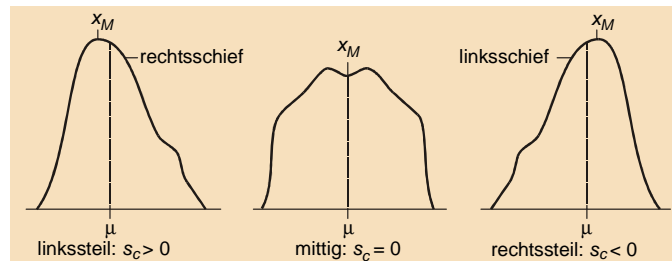


Abbildung 5: Schiefen empirischer Verteilungen

- **Spannweite**: größter x_g abzgl. kleinsten x_k Wert R bzw. in Relation R_r zum Mittel:

$$R = x_g - x_k \Leftarrow \begin{cases} x_k = \text{Min}_i [x_i] \\ x_g = \text{Max}_i [x_i] \end{cases} \quad R_r = \frac{R}{\mu}.$$

- **Streuweite**: größter K bzw. relativer K_r Abstand eines Randwertes zum Mittel:

$$K = \text{Max}_{x_g, x_k} \left[\begin{array}{l} \mu - x_g \\ \mu - x_k \end{array} \right], \quad K_r = \frac{2 \cdot K}{\mu}.$$

- **Variationskoeffizient** v , Standardabweichung durch arithmetisches Mittel:

$$v = \frac{\sigma}{\mu}.$$

- **Varianz** σ^2 : Quadratsumme der Abweichungen vom Mittel, und Standardabweichung σ :

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n h_i^* (x_i - \mu)^2, \quad \sigma = \left| \sqrt{\sigma^2} \right|.$$

Die Plausibilität asymmetrischer Dichtefunktionen mit endlichem DB beruht auf der Modifikation ausgesuchter Beteiligungsfunktionen³⁵ und der Analyse der Da-

³³ n ...Anzahl unterschiedlicher Merkmalswerte.

³⁴ I. Allg. zentrales Moment 3. Ordnung, gebildet aus Mittel μ und Standardabweichung σ .

³⁵ Logistische Exponential-Dichtefunktion, Erstveröffentlichung: Vgl. Oppitz 1977, S. 106 ff. [28] Potenzexponential-Dichtefunktion, Erstveröffentlichung: Vgl. Oppitz 1969, S. 467 ff. [26] Sinuspotenz-

tenverteilung der universellen β -³⁶ und Weibull-³⁷Dichtefunktion. Auswahlkriterien sind eine gute Annäherung der Funktionskurve an das empirische Erscheinungsbild und die kleinste Standardabweichung.

Fallstudie und Plausibilitätsbetrachtung

Steigende persönliche Zeitanteile in Arbeitsvorgängen verringern den Technisierungsgrad³⁸, Anreizsysteme der Leistungserfüllung verursachen linkssteile Häufigkeitsverteilungen und Beteiligungsfunktionen: Wer mehr leistet x_w als das Zeitmittel μ erhält höheren Lohn. Die beste Leistung liegt auf der Abszisse links a , die schlechteste rechts b : $0 \leq a < b < \infty$, $f(a), f(b) = 0$; die Vorgabezeit x_w hat die höchste Eintritts- $f(x_w)$ und kleinere Summenwahrscheinlichkeit $F(x_w)$, die Budgetzeit x_m ist höher als die Vorgabezeit: $x_m > x_w$, hat die kleinere Eintritts- $f(x_m)$ und höhere Summenwahrscheinlichkeit $F(x_w)$. Das erschwert die Kalkulation und erfordert, das Zeitstudienwesen vorzugsweise probabilistisch zu verbessern, weil diese Verfahren die Arbeitswirklichkeit besser erklären als deterministische (Abb. 6).

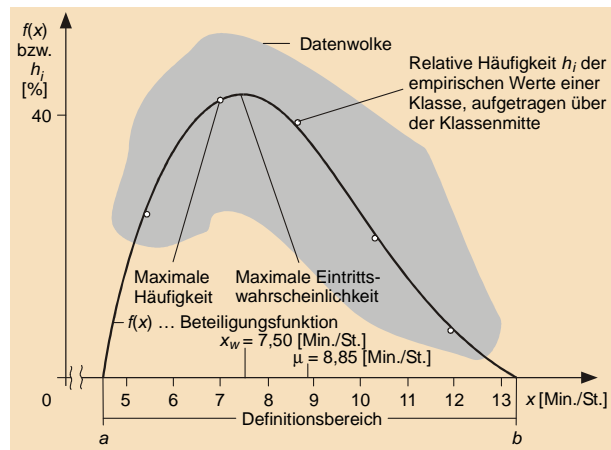


Abbildung 6: Beteiligungsfunktion und Häufigkeitsverteilung mit Datenwolke der Ist-Zeiten

Die Klärung der *Forschungsfrage* verlangt Analogieschlüsse, Beobachtungen, Experimente usw. bei der Suche nach geeigneten Beteiligungsfunktionen für die Beschreibung der Interaktionen und den Beweis ihrer Tauglichkeit für Modelldaten

Dichtefunktion, Erstveröffentlichung: Vgl. Oppitz 2007, S. 4 ff. [33]; Sinuszeitpotenz-Dichtefunktion, Erstveröffentlichung: Vgl. Oppitz 1966, S. 775 ff. [25]

³⁶ Vgl. Oppitz 2011/1, S. 128/135. [36] Die Approximation der impliziten Lösungsvariablen beansprucht geraume Zeit.

³⁷ Vgl. Oppitz 2011/1, S. 409 ff. [36]

³⁸ Vgl. Oppitz 1995, S. 328 ff, 508 ff (Arbeitsorganisatorische Kennzahlen) [29] und Oppitz 2011/1, S. 91 ff. [36]

(Tab. 2) der Zeitverteilung bestimmter Tätigkeiten: „... entdeckt wird der Beweis durch plausibles Schließen, durch Erraten“³⁹. Unter Beachtung vielfältiger Arbeitsbedingungen der Analyse, Gestaltung und wirtschaftlichen Verbesserung der Arbeitssysteme und des Zeitstudiums geht es darum:

- Vorgabezeiten⁴⁰ x_w für eine gerechte und faire Leistungsbewertung zu begründen,
- Budgetzeiten x_m für die Kapazitäts-, Kosten- und Lohnplanung nachzuweisen,
- Eintritts- und Summenwahrscheinlichkeiten $f(x_m)$, $F(x_m)$, $f(x_w)$, $F(x_w)$, Planreserve ΔK und Standardabweichung σ , ausreichend genau zu ermitteln.

i	x [min/St.]	h [%]	i	x [min/St.]	h [%]
1	$9,5 \leq 10 < 10,5$	0,00	7	$15,5 \leq 16 < 16,5$	4,79
2	$10,5 \leq 11 < 11,5$	11,28	8	$16,5 \leq 17 < 17,5$	1,43
3	$11,5 \leq 12 < 12,5$	24,38	9	$17,5 \leq 18 < 18,5$	1,27
4	$12,5 \leq 13 < 13,5$	26,30	10	$18,5 \leq 19 < 19,5$	0,09
5	$13,5 \leq 14 < 14,5$	19,12	11	$19,5 \leq 20 < 20,5$	0,00
6	$14,5 \leq 15 < 15,5$	11,34			

Tabelle 2: Modelldaten h für die Baumkerbungszeiten x zur Harzgewinnung

Die Regressionsanalyse mit Beteiligungsfunktionen dient folgenden Berechnungen:
 Vorgabezeit x_w : Argument des Gipfels $y_h = y$ der Funktion $f(x)$ rechts der Startposition s:

$$y := f(x), \quad a < x < b, \quad \text{\$} \max(y), \quad y_h = y, \quad \text{suche}(x, s), \quad x_w = x, \quad 0 \leq s < x_w.$$

$$\text{Budgetzeit } x_m \rightarrow \text{Halbfläche: } [x_m] \equiv \int_a^{x_m} f(x) \cdot dx = 0,5.$$

Summenwahrscheinlichkeit:

$$F(x_m) = \int_a^{x_m} f(x) \cdot dx, \quad F(x_w) = \int_a^{x_w} f(x) \cdot dx, \quad \Delta K = F(x_m) - F(x_w).$$

$$\text{Standardabweichung: } \sigma = \sqrt{\frac{1}{n-m} \cdot \sum_{i=1}^n (f(x_i) - h_i)^2}, \quad \begin{cases} m \dots \text{Anzahl Schätzparameter} \\ n \dots \text{Stichprobenumfang} \end{cases}$$

β -Dichtefunktion [MFL], (Abb. 7):

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \gamma + 2) \cdot (x - a)^\alpha \cdot (b - x)^\gamma}{(b - a)^{(\alpha + \gamma + 1)} \cdot \Gamma(\alpha + 1) \cdot \Gamma(\gamma + 1)}, \quad x \in \{a, b\}, \quad 0 < \alpha < \gamma.$$

Logistische Exponential-Dichtefunktion [MFM], (Abb. 7):

³⁹ Polya 1969, S. 171. [42]

⁴⁰ Vorgabezeit x_w : Stelle günstigsten Arbeitsverhaltens, Budgetzeit x_m : Normale Arbeitsbedingungen (vgl. Oppitz 1996). [30]

$$f(x) = \kappa \cdot \left(\frac{x}{h}\right)^\beta \cdot \frac{(b-x) \cdot e^{(\alpha \cdot x \cdot (2 \cdot b - x))}}{e^{(\alpha \cdot b^2)} - 1}, \quad x \in \{a, b\}, \quad \text{suche}(h, \beta, \alpha), \quad \kappa = 2 \cdot \alpha.$$

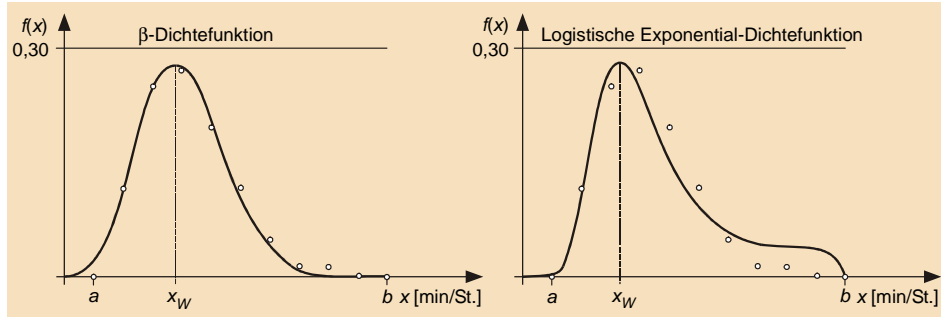


Abbildung 7: Modelldaten und Funktionskurven

Potenz-Exponential-Dichtfunktion [MFN], (Abb. 8):

$$f(x) = h \cdot \left(\frac{x}{b}\right)^{b \cdot \kappa - 1} \cdot e^{(\kappa \cdot (b - x))} \cdot \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{\beta \cdot x}, \quad x \in \{a, b\}, \quad \text{suche}(h, \beta, \kappa).$$

Sinuspotenz-Dichtfunktion [MFO], (Abb. 8):

$$f(x) = \sin\left(\frac{x \cdot \pi}{b}\right)^\kappa \cdot \left(\frac{h}{1+x}\right)^\beta, \quad x \in \{a, b\}, \quad \text{suche}(h, \beta, \kappa).$$

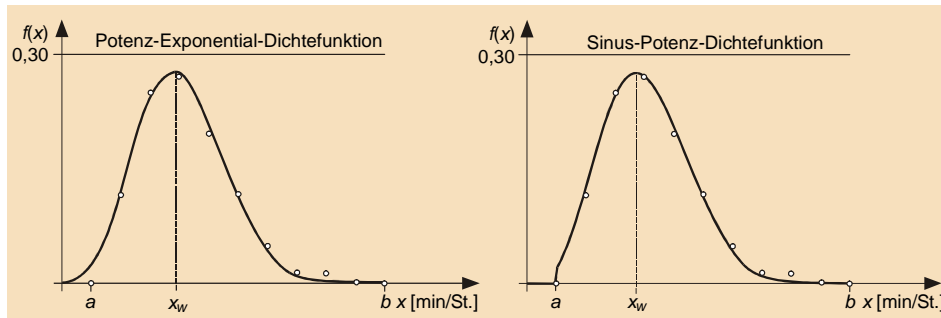


Abbildung 8: Modelldaten und Funktionskurven

Sinuszeitpotenz-Dichtfunktion [MFP], (Abb. 9):

$$f(x) = \sin\left(\pi \cdot \left[\frac{x-a}{b-a}\right]^\kappa\right) \cdot \left(\frac{h}{1+x}\right)^\beta, \quad x \in \{a, b\}, \quad \text{suche}(h, \beta, \kappa).$$

Weibull-Dichtfunktion [MFQ], (Abb. 9):

$$f(x) = \frac{\delta}{\eta} \cdot \left(\frac{x}{\eta}\right)^{\delta-1} \cdot e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\delta}, \quad x \in \{a, b\}, \quad \text{suche}(\delta, \eta).$$

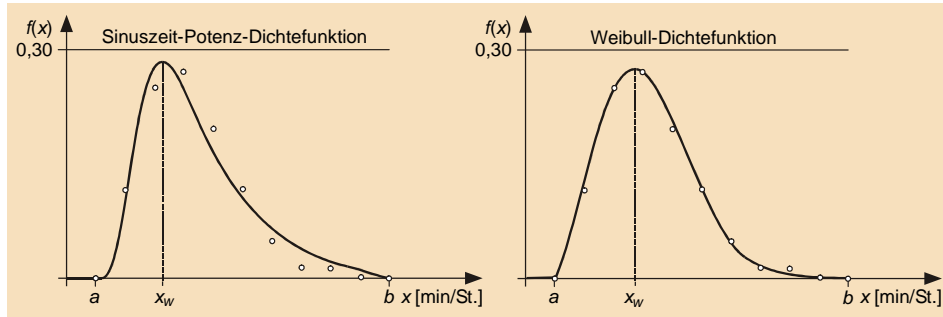


Abbildung 9: Modelldaten und Funktionskurven

Plausibilitätsbefund: Alle Beteiligungsfunktionen liegen im DB: $a \geq 0$, $b < \infty$, $f(a)$, $f(b) = 0$, die Vorgabezeiten x_w sind kleiner als die Budgetzeiten: $x_w < x_m$, die Kapazitätsreserven positiv: $\Delta K > 0$. Die Weibull- [MFQ], logistische Exponential- [MFM], Potenzexponential- [MFN], Sinuspotenz- [MFO] und Sinuszeitpotenzdichtefunktion [MFP] weisen höherer Standardabweichungen auf als die β -Dichtefunktion [MFL] (Tab. 3). Beteiligungsfunktion ist also die β -Dichtefunktion.

Code	ΔK	f_m	f_w	σ	x_m	x_w	Parameter
MFL	5,47	26,65	26,87	0,96	11,99	11,79	$\alpha = 3,78001$, $\gamma = 7,18950$
MFM	19,17	23,13	27,08	2,56	12,04	11,29	$\beta = 12,83958$, $h = 1,24964$, $\kappa = -0,48943$
MFN	4,56	26,77	26,92	1,06	11,99	11,82	$\beta = 0,49241$, $h = 1,18490$, $\kappa = 0,39044$
MFO	3,88	22,28	22,37	2,83	12,76	12,59	$\beta = 1,57655$, $h = 2,34425$, $\kappa = 3,73169$
MFP	18,33	19,64	21,83	1,95	13,24	12,37	$\beta = 17,44028$, $h = 9,11923$, $\kappa = 10,94272$
MFQ	12,60	25,39	26,52	5,79	11,22	10,74	$\delta = 2,27354$, $\eta = 3,53454$

Tabelle 3: Parameterwerte hypothetisch ausgewählter Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Beweisführung

Mathematische Beschreibung der β -Dichtefunktion

Die Beweisführung der Signifikanz der β -Beteiligungsfunktion erfolgt auf Grund von Zufallsstichproben und der β -Parameter, die wie folgt ermittelt werden: Eine

stetige Zufallsgröße X ist mit den Parametern: $p, q > 0$, erster Art β -verteilt, wenn sie folgende Dichte f_X mit der im Nenner stehenden normierten β -Funktion $B(p, q)$ aufweist:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ \frac{x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1}}{B(p, q)} & \text{für } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{für } x \geq 1 \end{cases} \quad B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \int_0^1 \frac{x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1}}{B(p, q)} \cdot dx.$$

Für ihre Benutzung ist der Ausdruck N wichtig, der sich aus dem allgemeinen Zusammenhang für das Argument x und der Glieder α, γ für die Exponenten p, q ergibt:

$$x = a + (b-a) \cdot t, \quad \alpha = p-1, \quad \gamma = q-1 \rightarrow N = \int_a^b (x-a)^\alpha \cdot (b-x)^\gamma \cdot dx, \quad \alpha, \gamma > 0.$$

Verteilungsparameter α, γ und Ränder a, b , in denen die Dichtefunktion ihre einzigen Nullstellen besitzt, passen sich Aufwandshäufigkeiten sehr gut an. Mit Ersatz der nicht standardisierten Beziehung für das Argument x und dessen Ableitung erhält das Integral N die Form:

$$x = a + (b-a) \cdot t \rightarrow dx = (b-a) \cdot dt \rightarrow N = (b-a)^{\alpha+\gamma+1} \cdot \int_0^1 t^\alpha \cdot (1-t)^\gamma \cdot dt.$$

Diese Umwandlungen ermöglichen die folgende Darstellung mit der Gammafunktion:

$$N = \frac{(b-a)^{(\alpha+\gamma+1)} \cdot \Gamma(\alpha+1) \cdot \Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+2)}.$$

Aus der ersten Ableitung der Dichtefunktion folgt:

$$f'(x) = N^{-1} \cdot (x-a)^{\alpha-1} \cdot (b-x)^{\gamma-1} \cdot [\alpha \cdot (b-x) - \gamma \cdot (x-a)], \quad (x \in (a, b)),$$

- das Dichtemaximum $f'(x_w) = 0$ an der Stelle der Vorgabezeit x_w , die das Intervall a, b im Verhältnis der Parameterwerte teilt:

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{x_w - a}{b - x_w} \rightarrow \boxed{x_w = \frac{\alpha \cdot b + a \cdot \gamma}{\alpha + \gamma}}$$

- für den vom Parameter α abhängigen Anstieg, dass er am linken Rand a bei $\underline{\alpha < 1}$: rechtwinklig auf die x -Achse stößt; bei $\underline{\alpha = 1}$: die x -Achse unter einem spitzen Winkel erreicht, der Anstieg der Tangente ist dem Exponenten α proportional: $f'(a) = \alpha \cdot N^{-1} \cdot (b-a)^\gamma$; bei $\underline{\alpha > 1}$: die x -Achse berührt: $f'(a) = 0$.

Gleiches gilt für den vom Parameter γ abhängigen Anstieg am rechten Rand b .

Bei Verwendung der standardisierten Grenzen $a = 0, b = 1$:

$$f(x) = N \cdot (x-a)^\alpha \cdot (b-x)^\gamma, \quad N = \left[\int_a^b (x-a)^\alpha \cdot (b-x)^\gamma \cdot dx \right]^{-1},$$

ergibt sich unter gleichsetzendem Tausch von $x \leftrightarrow t$ mit der Gammafunktion Γ :

$$f(t) = N \cdot t^\alpha \cdot (1-t)^\gamma, \quad N = \left[\int_0^1 t^\alpha \cdot (1-t)^\gamma \cdot dt \right]^{-1} = \frac{\Gamma(\alpha+\gamma+2)}{\Gamma(\alpha+1) \cdot \Gamma(\gamma+1)} \rightarrow$$

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\gamma+2) \cdot (x-a)^\alpha \cdot (b-x)^\gamma}{(b-a)^{(\alpha+\gamma+1)} \cdot \Gamma(\alpha+1) \cdot \Gamma(\gamma+1)}, \quad x \in \{a, b\}.$$

Die optimalen Kapazitäts- und Kostenpläne beruhen auf dem Mittel μ der β -Dichtefunktion. Für das Moment 1. Ordnung der standardisierten Funktion gilt:

$$\mu = \int_0^1 t \cdot f(t) \cdot dt = \int_0^1 t \cdot N \cdot t^\alpha \cdot (1-t)^\gamma \cdot dt = N \cdot \int_0^1 t^{\alpha+1} \cdot (1-t)^\gamma \cdot dt.$$

Die Beziehungen für das Integral und die Größe N :

$$\int_0^1 x^\alpha \cdot (1-x)^\gamma \cdot dx = \frac{\Gamma(\alpha+1) \cdot \Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+2)} \quad \text{und} \quad N = \frac{\Gamma(\alpha+\gamma+2)}{\Gamma(\alpha+1) \cdot \Gamma(\gamma+1)},$$

liefern das Integral für die Berechnung des Schwerpunktes:

$$\mu = N \cdot \int_0^1 t^{\alpha+1} \cdot (1-t)^\gamma \cdot dt = \frac{\Gamma(\alpha+\gamma+2)}{\Gamma(\alpha+1) \cdot \Gamma(\gamma+1)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+2) \cdot \Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+2)}.$$

Unter Bezug auf die induktive Eigenschaft der Gammafunktion ist das Mittel μ :

$$\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z) \Rightarrow \mu = \frac{\alpha+1}{\alpha+\gamma+2}.$$

Mit Einsetzen der Transformation für das Argument x gilt für den allgemeinen Fall:

$$\mu = a + (b-a) \cdot \frac{\alpha+1}{\alpha+\gamma+2} \rightarrow \boxed{\mu = \frac{a \cdot (\gamma+1) + b \cdot (\alpha+1)}{\alpha+\gamma+2}}$$

Die Standardabweichung σ resultiert aus folgender Entwicklung:

Das Moment 2. Ordnung ist:

$$N \cdot \int_0^1 t^{\alpha+2} \cdot (1-t)^\gamma \cdot dt = \frac{\Gamma(\alpha+\gamma+2)}{\Gamma(\alpha+1) \cdot \Gamma(\gamma+1)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+3) \cdot \Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+4)} = \frac{(\alpha+2) \cdot (\alpha+1)}{(\alpha+\gamma+3) \cdot (\alpha+\gamma+2)}.$$

Das zentrale Moment 2. Ordnung ist:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= N \cdot \int_0^1 (t - x_m)^2 \cdot t^\alpha \cdot (1-t)^\gamma \cdot dt, \\ \sigma^2 &= N \cdot \left(\int_0^1 t^2 \cdot t^\alpha \cdot (1-t)^\gamma \cdot dt - 2 \cdot x_m \cdot \int_0^1 t \cdot t^\alpha \cdot (1-t)^\gamma \cdot dt + x_m^2 \cdot \int_0^1 t^\alpha \cdot (1-t)^\gamma \cdot dt \right), \\ \sigma^2 &= \frac{(\alpha+2) \cdot (\alpha+1)}{(\alpha+\gamma+3) \cdot (\alpha+\gamma+2)} - 2 \cdot x_m \cdot x_m + x_m^2 \cdot 1, \\ \sigma^2 &= \frac{(\alpha+2) \cdot (\alpha+1)}{(\alpha+\gamma+3) \cdot (\alpha+\gamma+2)} - \frac{(\alpha+1)^2}{(\alpha+\gamma+2)^2} = \frac{(\alpha+1) \cdot (\gamma+1)}{(\alpha+\gamma+3) \cdot (\alpha+\gamma+2)^2}. \end{aligned}$$

Für die allgemeine β -Verteilung ist das Intervall $[0,1]$ auf die Breite a, b zu strecken, um dementsprechend die Varianz zu berechnen:

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2 \cdot (\alpha+1) \cdot (\gamma+1)}{(\alpha+\gamma+3) \cdot (\alpha+\gamma+2)^2}$$

Hypothese und Regressionsanalyse

Hypothese H_R : Mit β -Dichtefunktionen $f(x)$ ausgewertete Zufallsstichproben der Arbeitszeit x (DB: $a < x < b$, $a \geq 0$, $b < \infty$) ergeben (Abb. 10) bipolare Größen

- Budgetzeit x_m : ermöglicht Kosten- und Kapazitätsrückstellungen: $\Delta K > 0$,
- Vorgabezeit x_w : Höchste Eintrittswahrscheinlichkeit, produktiver als Budgetzeit: $x_w < x_m$.

Beim Überschreiten der Vorgabezeit wird das Liefer- und Kostenrisiko als Differenz ΔK der Summenwahrscheinlichkeiten der Budgetzeit K_B und Vorgabezeit K_V deutlich gemindert.

Die *Zufallsstichprobe*, $N = 5018^{41}$ (Abb. 11) enthält unter Ausschluss ungünstigen bzw. außergewöhnlichen Leistungsverhaltens erhobene Ist-Zeiten⁴² über Baumfällarbeiten⁴³ „ohne Zu-Fall-Bringen von Hängern, Feldnummer 480“⁴⁴ (Tab. 4).

⁴¹ Das ist nach dem „Wurzel aus n -Gesetz“ eine Grundgesamtheit von $25 \cdot 10^6$ Fällungen. Vgl. Oppitz 2011/1, S. 452 ff. [36]

⁴² Vgl. Häberle, S. 74/76. [14]

⁴³ Fallrichtung bestimmen, Stammfuß freimachen, elektrische Motorsäge [EMS] anwerfen, Wurzelanläufe beschneiden, Fallkerb anlegen und kontrollieren, Fäll-Schnitt führen, Keilen bis zum Abheben des Baumes (im schwachen Holz: Herausziehen der EMS aus dem Fäll-Schnitt), Warten beim Fallen des Baumes, nachträgliches Abschneiden von Wurzelanläufen, Entfernen des Waldhiebes, ggf. Wegstellen der EMS (Vgl. Erler/2, S. 158). [9]

⁴⁴ Die Anwendung forstwissenschaftlicher Daten schränkt die Verallgemeinerung für andere Wirtschaftszweige nicht ein, wichtig ist das Vorliegen einer echten Zufallsstichprobe mit Ist-Daten. (Vgl. Erler/1, S. 62). [8]

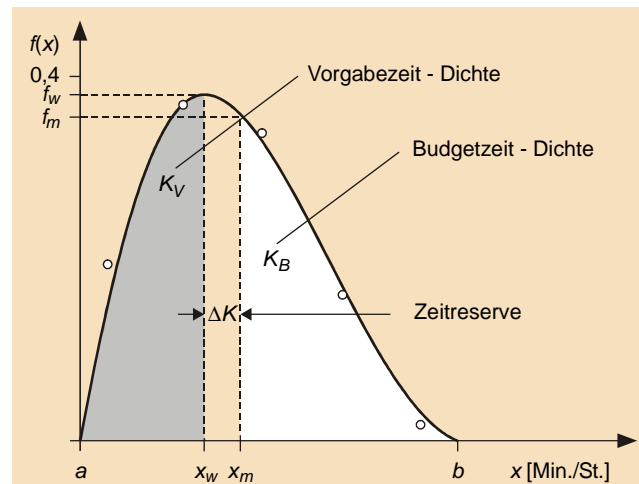


Abbildung 10: Abgeschätzte linkssteile β -Dichtefunktion $f(x)$ mit Modelldaten (\circ)

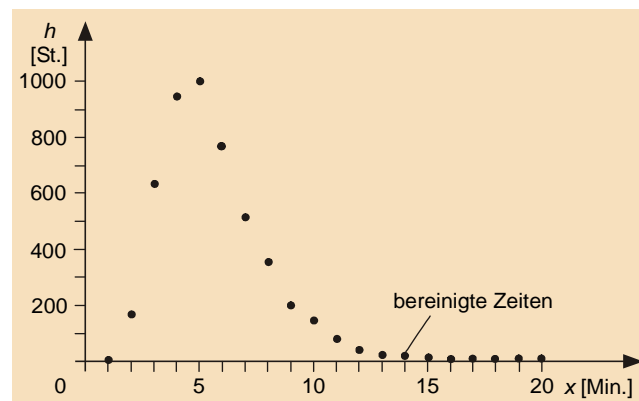


Abbildung 11: Linksschiefe Häufigkeiten forstwirtschaftlichen Zeiten

i	x	h	i	x	h	i	x	h
1	1,00	4	8	8,00	349	15	16,00	18
2	2,00	160	9	9,00	199	16	16,00	17
3	3,00	630	10	10,00	139	17	17,00	16
4	4,00	950	11	11,00	85	18	18,00	12
5	5,00	1002	12	12,00	45	19	19,00	10
6	6,00	779	13	13,00	38	20	20,00	9
7	7,00	529	14	14,00	28			

Tabelle 4: Gebrauchte Zeiten der Anzahl n gleicher Werte x_i , $i = 1, 2, \dots, n$ und Häufigkeiten h_i

Die Urliste $N = 5018$ St., wird in gleichabständige Klassen, $j = 1, 2, \dots, k \leq 14$, mit der Spannweite $R = 19,00$ min/St. wie folgt eingeteilt [KKA]:

$$k = \begin{cases} 1 & \text{für } N < 14 \\ \lceil 2.5 \cdot \lg N \rceil & \text{für } 14 \leq N \leq 10^4 \\ 14 & \text{für } N > 10^4 \end{cases}, \quad d = \left\lceil \frac{R}{k} \right\rceil, \quad B = d \cdot k, \quad k = \begin{cases} k, & \text{wenn } B \geq R \\ 1+k, & \text{wenn } B < R \end{cases}$$

Bedingung $B = 20,00 \text{ min/St.}$, Klassenbreite $d = 2,00 \text{ min/St.}$, Klassenanzahl $k = 10$
 St. Klassenmerkmale: 1. Die Werte der Klasse dürfen auf ihrer unteren Grenze liegen, keinesfalls auf ihrer oberen, und ihre Anzahl j_h , $j = 1, 2, \dots, k$, muss dem Umfang der Urliste N entsprechen. 2. Die Klassenbildung ist vollständig (Tab. 5)⁴⁵, wenn jeder Wert einer Klasse zugeordnet werden kann (Eindeutigkeit) und keiner in mehrere Klassen fällt (Ausschließlichkeit). Auf der Klassenbildung beruht die Eingabeliste (Tab. 6) für die Regressionsanalyse.

1	$1 \leq x < 3$	1,0	4	2,0	160	164	1,98	2	3,27	0,02439
2	$3 \leq x < 5$	3,0	630	4,0	950	1580	3,60	4	31,49	0,39873
3	$5 \leq x < 7$	5,0	1002	6,0	779	1781	5,44	6	35,49	0,56261
4	$7 \leq x < 9$	7,0	529	8,0	349	878	7,40	8	17,50	0,60251
5	$9 \leq x < 11$	9,0	199	10,0	139	338	9,41	10	6,74	0,58876
6	$11 \leq x < 13$	11,0	85	12,0	45	130	11,35	12	2,59	0,65385
7	$13 \leq x < 15$	13,0	38	14,0	28	66	13,42	14	1,32	0,57576
8	$15 \leq x < 17$	15,0	18	16,0	17	35	15,49	16	0,70	0,51429
9	$17 \leq x < 19$	17,0	16	18,0	12	28	17,43	18	0,56	0,57143
10	$19 \leq x < 21$	19,0	10	20,0	8	18	19,44	20	0,36	0,55556
{1}	{2}	{3}				{4}	{5}	{6}	{7}	{8}

Tabelle 5: Klassenstruktur der Häufigkeitsverteilung h [St.] gebrauchter Zeiten x [Min./St.]

Klassen x [Min./St.]	i [Nr.]	h [%]	Klassen x [Min./St.]	i [Nr.]	h [%]
$1,0 \leq 2,0 < 3,0$	1	3,27	$11 \leq 12 < 13$	6	2,59
$3,0 \leq 4,0 < 5,0$	2	31,49	$13 \leq 14 < 15$	7	1,32
$5,0 \leq 6,0 < 7,0$	3	35,49	$15 \leq 16 < 17$	8	0,64
$7,0 \leq 8,0 < 9,0$	4	17,57	$17 \leq 18 < 19$	9	0,56
$9,0 \leq 10 < 11$	5	6,71	$19 \leq 20 < 21$	10	0,36

Tabelle 6: Eingabeliste mit den Häufigkeiten gebrauchter Zeitaufwände

⁴⁵ Die Formeln sind über das Tabellen-Menü aufrufbar. Es bedeuten: {1}...Nummer.

{2}...Klassenbreite $d = 2 \text{ min/St.}$ {3}...Datenzuordnung x_i , h_i . {4}...Absolute Häufigkeit.

{5}...Arithmetisches Mittel der Klassenwerte. {6}... Klassenmitte. {7}...Relative Häufigkeit.

{8}...Klassenvarianzen, Summe: $\sigma^2 = 5,04789$.

Die Werte der Exponenten $\alpha < \gamma$, die Intervallgrenze b usw. werden regressionsanalytisch abgeschätzt⁴⁶ [MZR] und mit Funktionskurve (Abb. 12) und -liste ausgegeben (Tab. 7).

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \gamma + 2) \cdot (x - b + a)^\alpha \cdot (b - x)^\gamma}{n^{(\alpha + \gamma + 1)} \cdot \Gamma(\alpha + 1) \cdot \Gamma(\gamma + 1)}, \quad a < x < b, \quad a = b - n, \quad 0 < \alpha < \gamma$$

$$[b, \alpha, \gamma] \equiv \sum_{i=1}^n (f(x_i) - h_i)^2 \rightarrow \text{Min!} \quad f(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \gamma + 2) \cdot (x - a)^\alpha \cdot (b - x)^\gamma}{(b - a)^{(\alpha + \gamma + 1)} \cdot \Gamma(\alpha + 1) \cdot \Gamma(\gamma + 1)}$$

$$x_h = \sum_{i=1}^n x_i \cdot h_i, \quad x_m = \frac{a \cdot (\gamma + 1) + b \cdot (\alpha + 1)}{\alpha + \gamma + 2}, \quad x_w = \frac{\alpha \cdot b + \gamma \cdot a}{\alpha + \gamma}, \quad f_h = f(x_h), \quad f_m = f(x_m)$$

$$f_w = f(x_w), \quad K_B = \int_a^{x_m} f(x) \cdot dx, \quad K_V = \int_a^{x_w} f(x) \cdot dx, \quad \Delta K = K_B - K_V$$

Auftragssicherheit	ΔK	=	15,82	%
Wahrscheinlichkeit der Budgetzeit	K_B	=	54,51	%
Wahrscheinlichkeit der Vorgabezeit	K_V	=	38,68	%
Linke Intervallgrenze	a	=	0,68126	
Linker Verteilungsparameter	α	=	2,35998	
Rechte Intervallgrenze	b	=	10,68126	
Häufigkeit der mittleren Normalzeit	f_h	=	33,21	%
Wahrscheinlichkeit der Budgetzeit	f_m	=	35,32	%
Wahrscheinlichkeit der Vorgabezeit	f_w	=	37,83	%
Rechter Verteilungsparameter	γ	=	10,26418	
Mittlere Normalzeit	x_h	=	6,30	min/St.
Budgetzeit	x_m	=	5,96	min/St.
Vorgabezeit	x_w	=	5,10	min/St.

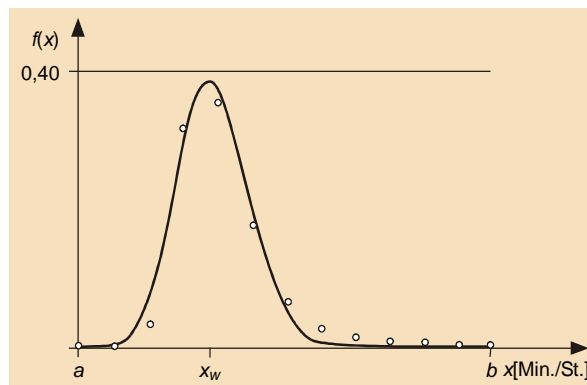


Abbildung 12: β -Dichtefunktionskurve mit forstwirtschaftlichen Zeiten (\circ)

⁴⁶ Die computergestützte OR_MAT-Lösungssuche beruht auf dem Term „ $[h_i, \kappa]$ “.

i [Nr.]	f [%]	h [%]	i [Nr.]	f [%]	h [%]
1	3,49	3,27	6	1,54	2,59
2	32,53	31,49	7	0,20	1,32
3	35,09	35,49	8	0,01	0,64
4	19,54	17,57	9	0,00	0,56
5	6,89	6,71	10	0,00	0,36

Tabelle 7: Liste mit Wahrscheinlich- und Häufigkeiten gebrauchter Zeitaufwände

Mutungs- und Streuungstest

Die Widerspruchsfreiheit der Hypothese H_R wird durch parameterfreien Mutungs- und parametrischen Streuungstest, also nicht streng axiomatisch⁴⁷, mit Nullhypothesen H_0 (Annahme: $H_0 = 1$, Ablehnung: $H_0 = 0$) und einem Signifikanzniveau $\varepsilon = 95\%$ geprüft. Mittel und Varianz der Stichprobe m_h , $\sigma^2 = 2,08316$, und β -Dichtefunktion x_m , $\sigma_f^2 = 1,13266$ sind bekannt.

Mutungstest der Nullhypothese [KKN] $H_0^1 = 1$, ob die Zufallsgrößen der empirischen Verteilung in wahrscheinlichkeitstheoretischen Mutungsgrenzen liegen: Die Summe der Differenzen der Häufigkeiten h_j und der Werte $f(j)$ der β -Dichtefunktion sind kleiner als die Summe der nach Hotelling-Working⁴⁸ berechneten Vertrauensintervalle $v(j)$. Parameter der unteren $f_u(x)$ und oberen Vertrauensgrenzen $f_o(x)$ sind: Student-Parameter λ , Standardabweichung der Approximation und der Summe der Klassenmitten, empirisches Mittel j_h , Klassenanzahl k , Freiheitsgrad $u = k - m$ und Signifikanzkoeffizienten ε (Abb. 13).

$$f_j = \frac{\Gamma(\alpha + \gamma + 2) \cdot (j - a)^\alpha \cdot (b - j)^\gamma}{(b - a)^{(\alpha + \gamma + 1)} \cdot \Gamma(\alpha + 1) \cdot \Gamma(\gamma + 1)}, \quad \Delta_j = f_j - h_j^*, \quad S_f = \sum_{j=1}^k \Delta_j \quad u = k - m$$

$$\sigma_R = \sqrt{\frac{1}{u} \cdot \sum_{j=1}^k \Delta_j^2}, \quad [\lambda] \equiv \left[\varepsilon = \frac{2 \cdot \Gamma\left(\frac{u+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{u}{2}\right) \cdot \sqrt{u \cdot \pi}} \cdot \int_0^\lambda \left(\frac{1+x^2}{2}\right)^{-\frac{u+1}{2}} \cdot dx \right], \quad j_h = \sum_{j=1}^k j \cdot h_j^*$$

$$v_j = \lambda \cdot \sigma_R \cdot \sqrt{\frac{1}{k} + \frac{(j - j_h)^2 + \sigma_j^2}{\sum_{j=1}^k (j - j_h)^2}}, \quad S_v = \sum_{j=1}^k v_j, \quad H_0 = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \sum_{j=1}^k v_j \geq \sum_{j=1}^k \Delta_j \\ 0, & \text{wenn } \sum_{j=1}^k v_j < \sum_{j=1}^k \Delta_j \end{cases}$$

⁴⁷ „Auf alle Fälle kommt man mit axiomatischen Beweisverfahren allein ... nicht durch.“ Weber, S. 72. [48]

⁴⁸ Für Regressionsanalysen bestens geeignet. Vgl. Egermayer, F. 229 ff. [7]; Vgl. Oppitz 2011/1, S. 107/123. [36]

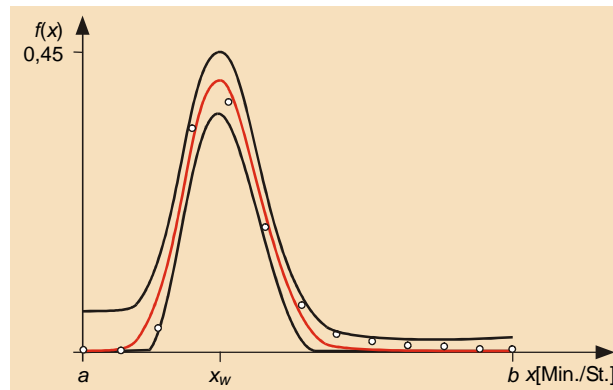


Abbildung 13: β -Dichtefunktionskurven und Mutungsgrenzen mit forstwirtschaftlichen Zeiten

Anzahl abgeschätzter Parameter	m	=	3
Nullhypothese, (widerspruchsfrei)	H_0	=	1
Empirische Abweichungssumme	S_f	=	7,65
Zufällige Abweichungssumme	S_v	=	11,53
Mittlere Klassenhäufigkeit	j_h	=	3,15440
Student-Parameter	λ	=	2,36462
Freiheitsgrad	u	=	7
Die Nullhypothese wird $H_0 = 1$ bestätigt, der dafür entwickelte Mutungstest ist erfolgreich!			

χ^2 -Streuungstest der Nullhypothese [MZS] H_0 : χ^2 -Streuungstest $H_0^2 = 1$ $H_0^1 = 1$, ob bestimmte Funktionsparameter hinsichtlich der Häufigkeitsverteilung das vorgegebene Signifikanzniveau nicht unterschreiten. Prüfung mit der Testgröße T , ob die Varianz σ^2 der Zufallsgrößen x_1, x_2, \dots, x_n im Signifikanzniveau ε der Varianz der β -Dichtefunktion liegt (Abb. 14).

$$\mu_h = \sum_{i=1}^n x_i \cdot h_i, \quad \sigma_h^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (h_i \cdot (x_i - \mu_h)^2)}{n-1}, \quad \sigma_f^2 = \frac{(b-a)^2 \cdot (\alpha+1) \cdot (\gamma+1)}{(\alpha+\gamma+3) \cdot (\alpha+\gamma+2)^2}$$

$$T = (n-1) \cdot \frac{\sigma_f^2}{\sigma_h^2}, \quad [\chi^2] \equiv q = \frac{1}{2^{\frac{f}{2}} \cdot \Gamma(\frac{f}{2})} \cdot \int_0^{\chi^2} x^{\frac{f}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot dx \quad \begin{cases} H_0 = 1, & \text{wenn } T \leq \chi^2 \\ H_0 = 0, & \text{wenn } T > \chi^2 \end{cases}$$

Nullhypothese	H_0	=	1
Testgröße	T	=	16,55
Testgrenze	χ^2	=	16,92

Der χ^2 -Streuungstest bestätigt die Nullhypothese $H_0 = 1$! Die *betriebswirtschaftliche Hypothese* über bipolare Zeitaufnahmen H_R mit der β -Dichtefunktion ist widerspruchsfrei.

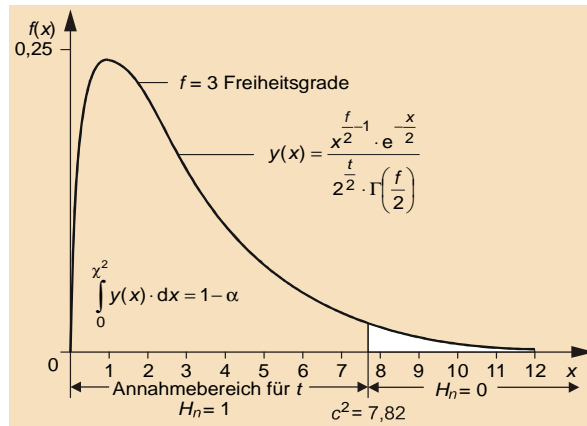


Abbildung 14: Kurve der χ^2 -Wahrscheinlichkeitsdichte mit dem Signifikanzniveau $\varepsilon = 0,95$

Unschärfe Mathematikanwendungen

Veranlassung

Es gibt Ansichten, dass „An-sich-Mathematik“ Ausdruck hoher Wissenschaftlichkeit sei, unabhängig davon, ob Interaktionen mathematisch erklärt werden, quantitative Variablen vorliegen, Beteiligungsfunktionen der Fachdisziplin genügen, korrekte Lösungen mit Vorteilen zu Lasten Dritter entstehen usw. Einige in Lehre und Literatur entdeckte mathematische u.a. Nachlässigkeiten werden zum besseren Verständnis beleuchtet. Die für diese Fälle kodierten Quellen [Q1 usw.] wurden namentlich beim Herausgeber hinterlegt.

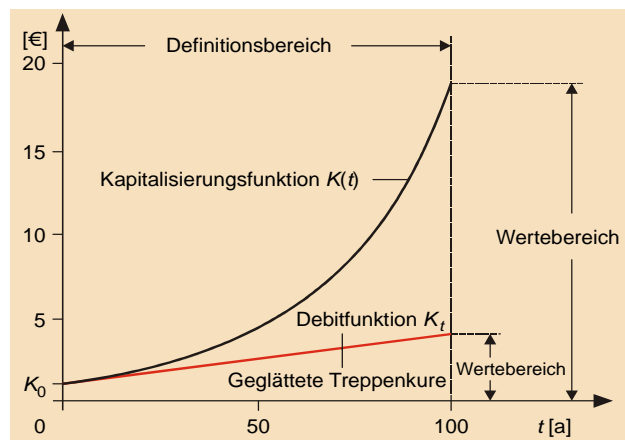
Vorfälligkeitsentgelt bei einer Kreditkündigung

Durch Kreditvertrag verpflichtet sich der Gläubiger zur Zahlung eines Geldbetrages K und der Schuldner, diesen ganz oder in Raten zu tilgen und den *linear* berechneten Zins⁴⁹ Z zu zahlen (Abb. 15). Bei Vertragskündigung während der Zinssatzbindung entsteht die Forderung nach Vorfälligkeitsentgelt⁵⁰: Saldo der Bar-

⁴⁹ Kreditpreis (vgl. Albach, S. 10), wirkt im Außenverhältnis bei Störung der Vertragsbeziehungen (vgl. Albach, S. 206). [1]

⁵⁰ Es ist weder Vertragsstrafe (§ 339 BGB) noch Schadensausgleich. Vertragsklauseln wären unwirksam, hätten aber bei Verweigerung des Gläubigers, den Vertrag vorzeitig aufzulösen, ein vertragliches Kündigungsrecht bestimmt. Diese Zinsschadenspauschale soll den Vertragspartner weder übervorteilen noch benachteiligen (AGBG § 11 (5)).

zinsen⁵¹, errechnet mit dem Zinssatz p aus den Restschuldsummen und mit dem Neuzinssatz k der gezahlten Restschuldsumme.



Linear: $K_t = K_0 \cdot (1+p \cdot t)$

Konform: $K(t) = K_0 \cdot (1+p)^t$

Abbildung 15: Kurven der (linearen) Debit- K_t und (konformen) Kapitalisierungsfunktion $K(t)$

Die anwaltlich beauftragte Prüfung, ob die Bank ordentlich gerechnet hat, ergab eine zu hohe Forderung. Bankbegründung: „Ferner ist der Tatsache, dass ... im Darlehensvertrag aber innerhalb des Jahres Zahlungen vorgesehen sind, durch eine Umrechnung des Zinssatzes in der Weise Rechnung getragen worden, dass sich hier *kein zusätzlicher Nutzen für die Bank durch die Zahlungsweise ergibt (konformer Zins)*.“⁵² Aber kann bei „unterjährlichen Zinsperioden entweder der relative unter-

jährliche Periodenzins $i^* = \frac{i}{m}$ (3–13) oder der konforme unterjährliche Perioden-

zins $k = \sqrt[m]{1+i} - 1$ (3–16) verwendet werden“⁵³. Stimmen linearer und konformer Zins unterjährlich überein? Ein Zinssatz $i = 6\%$ /a, ist im Quartal ($m = 4$) \rightarrow linear: $i^* = 1,5\%$ /Qu. \rightarrow konform⁵⁴: $k = 1,46738\%$ /Qu. Steigt der Zinssatz i^* , steigt der Zins \rightarrow fällt der Diskontsatz k , steigt der Barzins: Die Bank *erzielt einen zusätzlichen Nutzen*.⁵⁵

⁵¹ Die für „die Restlaufzeit des abzulösenden Darlehens sich ergebenden Zinseinbußen müssen auf den Zeitpunkt der Zahlung der Vorfälligkeitsentschädigung abgezinst werden.“ (BGH 97, S. 1750).

⁵² Q3, S. 1. Vgl. auch Oppitz 2002. [32]

⁵³ Q1, S. 143.

⁵⁴ § 248 Abs. 1 BGB verbietet die Kapitalisierung der Darlehen als unzulässige Vereinbarung von Zinsen auf Zinsen. Das Verbot des Zinseszinses (Anatozismus) schließt folglich ein, keine (konformen) Renditesätzen zu verwenden.

⁵⁵ I. d. R. lautet der Trick: Sie sind an niedrigen Zinsen interessiert, der konforme Zinssatz ist kleiner als der lineare.

Doppeldeutigkeit im Wertpapiergeschäft

„Die Duration ist zu verstehen als die durchschnittliche Bindungsdauer ... des eingesetzten Kapitals in Jahren.“⁵⁶ „Mathematisch ist die Duration D ein Maß für die Elastizität (T) des Anleihepreises B in Bezug auf Änderungen des Marktzinses i “⁵⁷, vereint durch eine Formel:

$$\text{Bindungsdauer : } "D = \frac{\sum_{t=1}^n t \cdot E_t \cdot (1+i)^{-t}}{\sum_{t=1}^n E_t \cdot (1+i)^{-t}}" \quad \text{Elastizität : } "T = \frac{\sum_{t=1}^n t \cdot E_t \cdot (1+i)^{-t}}{\sum_{t=1}^n E_t \cdot (1+i)^{-t}}."$$

Die Laufzeit T folgt aus der Aufteilung der Geldanlage⁵⁸ A_0 auf periodische Renten R , deren geometrische Reihe der Barrenten die geschlossene Lösung K_R besitzt:

$$T = \frac{A_0}{R}, \quad t = 1, 2, \dots, T,$$

$$K_R = R \cdot \left((1+r)^0 + (1+r)^1 + \dots + (1+r)^{T-1} \right), \quad \text{Summe : } K_R = R \cdot \frac{(1+r)^T - 1}{r}, \quad r > 0.$$

Bindungsdauer $D(r)$: Es gilt die vom Rentensatz r ⁵⁹ abhängige Gleichung $K_R = A_0$ [DUE]:

$$K_R = A_0 = R \cdot \frac{(1+r)^D - 1}{r}, \quad T = \frac{A_0}{R} = \frac{(1+r)^D - 1}{r} \rightarrow D(r) = \frac{\ln(1+r \cdot T)}{\ln(1+r)}.$$

Bei „zehnjähriger Restlaufzeit bei einem Kupon von 8,5 % und“ $r = „6,5\%“$ ergibt sich folgende Duration“: „ $D = 7,1191$.“⁶⁰ $D(r) = 7,54089$ [a]. „... für eine normale Obligation“⁶¹, $T = 5$ a, „... 6 % (jährliche Couponzahlung)“. „Duration 4,4817“ [a]. $D(r) = 4,50265$ [a].

Elastizität $\varepsilon(r)$ ⁶²: Vom Rentensatz x bewirkte Änderung der Duration $y = D$ mit der Punktelastizität $\varepsilon_f(x)$ funktionell⁶³ mit $f(x)$: $\varepsilon_f(x) = \frac{df(x)}{dx} \cdot \frac{x}{f(x)}$ (x – reell). Elastizität der Duration $D(r)$ ist ihr Kurvenanstieg (Abb. 16).

⁵⁶ Steiner/Bruns, S. 155. [47]

⁵⁷ Steiner/Bruns, S. 157. [47]

⁵⁸ Die Kenntnis dieser Größen gestattet Analysen des Kapitalmarktes und reaktiver Anlagestrategien, vgl. Gallati, S. 81. [12]

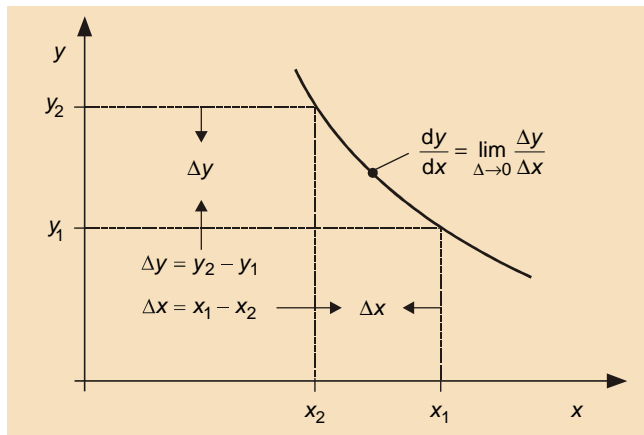
⁵⁹ „Dabei ist die Duration umso niedriger, je höher Kupon (Nominalzins) und Markttrendite sind ...“ Schierenbeck, S. 302. [45]

⁶⁰ Steiner/Bruns, S. 159. [47]

⁶¹ Gallati, S. 73. [12]

⁶² Vgl. Führer, S. 178. [11] Oft als Zinssensitivität bezeichnet, obwohl kapitalisiert wird. Vgl. u.a.: Spremann, S. 147/155. [46]

⁶³ Vgl. Oppitz 2011/1, S. 181. [36]



$$f(x) = \frac{\ln(1+x \cdot T)}{\ln(1+x)}$$

$$r = x, p \neq r$$

$$D_r = \frac{\ln(1+r \cdot T)}{\ln(1+r)}$$

$$e_{p,r} = \frac{D_p - D_r}{p - r}$$

$$E_{p,r} = \frac{r \cdot e_{p,r}}{D_r}$$

Abbildung 16: Bogenelastizität dy/dx und Punktelastizität $\Delta y/\Delta x$

Beispiel⁶⁴: Duration $D_r = 2,84053$ a, Rentensatz $r = 6$ %/a, Laufzeit $T = 3$ a [DUF].
Neuer, Rentensatz $p = 7$ %/a; Elastizität relativ $E_{p,r} = -4,89$ %, absolut $e_{p,r} = -2,31$.

Lineare Rendite in Prozent?

Durationen⁶⁵ stellen „... eine Kenngröße...“, und „... starke Vereinfachung dar, zumal die Form der Zinsstrukturkurve stets erhalten bliebe“ (Abb. 17).⁶⁶ Linear? (Tab. 8). Absolut, relativ? Ordinate misst Renditen [€] in Anteilssätzen [%]. Zinsstrategien aus Umweltzuständen? Oder mit Renditesätzen, Laufzeiten und Verschuldungsgraden⁶⁷ (Abb. 18).

Bezug	Investitionsrechnung	Finanzrechnung
Wirtschaft	Anlageverhältnis → Geometrische Reihe	Leihverhältnis → Arithmetische Reihe
Bezeichner	Anschaffungsauszahlung, Rate, Rente, Renditesatz, Bindungs-, Rückflussdauer	Anleihe, Zins, Annuität, Zinssatz, Verfügbarkeitsdauer
Umformung	Abrenten, Aufrenten	Diskontieren, Askontieren (Ab-, Aufzinsen)

Tabelle 8: Vergleich der Finanz- mit der Investitionsrechnung

⁶⁴ Vgl. u.a.: Spremann, S. 157. [46]

⁶⁵ In „Bewertung von Zinsbindungsstrategien unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß“. Vgl. Q2, S. 114.

⁶⁶ Q2, S. 14.

⁶⁷ Vgl. Oppitz 2009 und 2010. [34, 35]

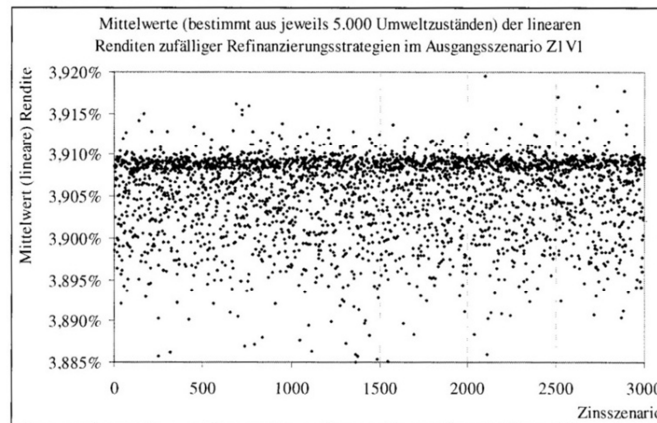


Abbildung 17: „Mittelwerte der linearen Renditen verschiedener stationärer Zinsstrategien ... (eigene Berechnungen)“

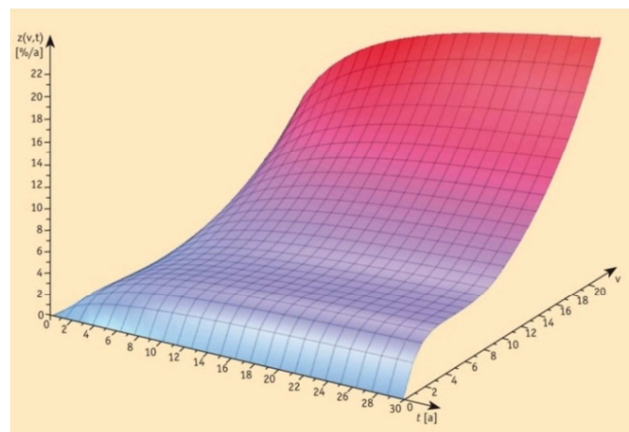


Abbildung 18: Renditesatz $z(v,t)$, abhängig vom Verschuldungsgrad v und Nutzungsdauer t

Stationäre oder unternehmerische Strategie

Stationäre Strategien beziehen sich auf „... zur Verfügung stehende Handlungsalternativen“⁶⁸, um „ein Geschäft oder Unternehmen gezielt durch die Unsicherheiten unserer Zeit zu steuern“⁶⁹, nicht auf Zeitpunkte⁷⁰. Oder gilt: „Der Kapital-⁷¹ bzw. Marktwert $KW_{ai}(u)$ der stationären Strategie a_1 im Zeitpunkt u ergebe sich aus

⁶⁸ Neumann, S. 143. [24]

⁶⁹ Kohlöffel, S. 2. [17]

⁷⁰ Strategiemodelle sind umso waghalsiger, je weniger empirische Daten vorliegen

⁷¹ I. Allg. gilt: Anlagekapital K , Laufzeit N , Kostensatz k , Eigenkapitalrenditesatz p , Fremdkapitalzinssatz z ,

Rating-Note v und Kreditlaufzeit $t \rightarrow K_W = f(K, N, k(p, z(v(K_E, K_F), t)))$.

sämtlichen in u amalgamierten Zahlungsvorgängen $X_{a_l(t)}|_{t \in [T_A, T_E]}$ der Refinanzierungsstrategie a_l :

$$KW_{a_l}(u) = \sum_{s=T_A}^{u-\tau} \left[\left(\prod_{t=s}^{u-\tau} (1 + F(t, t + \tau)) \right) X_{a_l}(s) \right] + X_{a_l}(u) + \sum_{v=u+\tau}^{T_E} \left[\prod_{t=u}^{v-\tau} \frac{1}{1 + F(t, t + \tau)} X_{a_l}(v) \right]$$

mit $T_A \leq s \leq u \leq v \leq T_E$, wobei $F(u, t, t + \tau)$ dem risikolosen Periodenzinssatz in u für den Zeitraum $[t, t + \tau]$ entspricht.⁷²

- Betriebswirtschaftliche Strategien korrelieren mit volkswirtschaftlichen Variablen *unter Nachwirkung früherer Zustände auf künftige Ereignisse!* Stationäre Markowsche Ketten⁷³ simulieren keine komplexen unternehmerischen Entscheidungsprozesse.
- Keine Begriffsklarheit⁷⁴. Wie wird z.B. der Zinssatz ein zeitabhängiger Term $F(u, t, t + \tau)$ und im Zeitpunkt t risikolos in u , der dem Zeitraum $[t, t + \tau]$ entspricht?

Die fehlende Validierung des Modells mit empirischen Daten ist bedauerlich, die Berechnungen beruhen auf Computersimulationen des Autors.

Einige Anforderungen an Mathematiktexte

Der auf Mathematik beruhender Erkenntniszuwachs wird durch Hypothesen, The- sen, Analogien, Deduktion und Induktion erklärt. Das auf Invarianzen⁷⁵, Strukturen, Systemoptimierung⁷⁶ usw. bezogene Ziel- und Bedingungsgefüge ist in die Feld- oder Materialforschung einzuordnen. Begriffe mit unterschiedlicher Bedeutung in Betriebswirtschaft und Mathematik sind aufeinander abzustimmen, wie z.B. „Strategie“, und mathematische Abbildungen zu erklären. Vorrang hat der Fachbegriff, der mathematische Bedeutungszusammenhang zur Betriebswirtschaftslehre ist dar- zulegen. Auf Logik und Gesetzmäßigkeiten gestützte Optimal- und Zerlegungs- grundsätze mathematischer Abbildungen erlauben das Hinrechnen vom Wissens- stand E_W auf den Erkenntniszuwachs E_Z und durch Zurückrechnen die Findung stra- tegischer Handlungsziele (Abb. 19).

⁷² Q2, S. 14. Zur mathematischen Korrektheit zitierter Formeln werden keine Aussagen getroffen.

⁷³ Vorausgesetzt wird: Ein invarianter Diskontfaktor, endliche Zustands- und Steuerbereiche.

⁷⁴ Was sind amalgamierte Zahlungsvorgänge?

⁷⁵ Feste Beziehung zwischen Werten abhängiger und unabhängiger Veränderlichen, die bei Änderungen des Bedingungsgefüges in ein labiles Stadium übergehen.

⁷⁶ Beste Kombination der Interaktionen, um den günstigsten Zustand eines Systems zu erhalten. Vgl. Ducrog, S. 41. [5]

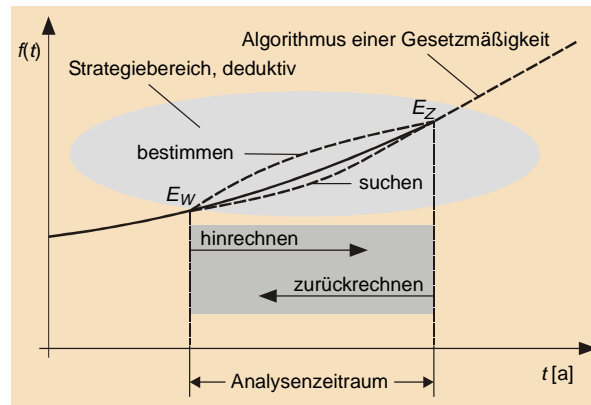


Abbildung 19: Algorithmische Darstellung strategischer Entscheidungsfindung

Die Mathematik verlangt Vielseitigkeit⁷⁷ und Genauigkeit bei der betriebswirtschaftlichen Begründung der Formeln, der Zulässigkeit der Verfahren, der Richtigkeit der Lösungen und Unwiderlegbarkeit getroffener Annahmen, weil „die Sprache der Mathematik durch die Verwendung von Symbolen geprägt ist; diese sind kein Selbstzweck, sondern dienen dazu“, sie „mit Standardsymbolen kontrollierbar zu bezeichnen.“⁷⁸ Ihre Größen haben Namen⁷⁹, wie z.B. „Arithmetisches Mittel“, dazugehörige „Bezeichner“⁸⁰ x_m , „Werte“ $x_m = 12,5$ und „Maßeinheiten“ [cm] (Abb. 20).

Konstante: feststehende Werte, wie z.B. Umsatzsteuersatz 7,00 %.

Veränderliche: Unabhängige erhalten Werteingaben von außen, abhängige intern durch Funktionen oder Gleichungen.

Terme: regelgerechte Ausdrücke, z.B.: $e = 2,718281828459.....$, $(x + e^x)^2$, \sin , $(7 + 3)$.

Funktion: Ordnet den Elementen einer Menge unabhängiger Veränderlichen (DB) genau ein Element der abhängigen Variablen zu, wie z.B.:

⁷⁷ „Was wir heute Mathematik nennen, ist die Vereinigung von einem Klecks Logik und Mengenlehre, von etwas axiomatischer Theorie linear geordneter Körper, analytischer Geometrie und Topologie, die letztere sowohl im „allgemeinen“ Sinne (Grenzwerte und stetige Funktionen), die richtig so genannt wird (Differentiation), und etwas kombinatorischer Symbolmanipulation, die formale Integration genannt wird, von den ersten Schritten der klassischen Analysis der trigonometrischen Funktionen, der Exponentialfunktionen und der logarithmischen Funktionen und, abhängig vom verfügbaren Raum und den persönlichen Neigungen des Autors, von einigen Kochbuch-Differentialgleichungen, elementarer Mechanik und einer kleinen Auswahl angewandter Mathematik.“ Halmos, S. 7. [15]

⁷⁸ Beutelspacher 1, S. 29. [2]

⁷⁹ Satz, Wort, Buchstaben- oder Ziffernabkürzung zur Erklärung des Algorithmus, der Datenquelle usw.

⁸⁰ Bezeichner, Parameter unterliegen universeller mathematischer Notation; innerhalb der Schrift dürfen sie nicht mehrere Bedeutungen zugewiesen erhalten; allgemein gebräuchliche sollten übernommen werden.

$K(t) = K_0 \cdot e^{kt}$, $t \in [0, T]$ oder $t \in [0, \infty]$, falls T unbekannt ist. Eine Funktion geht in eine Gleichung über, wenn der Wert der abhängigen Variablen für einen Wert der unabhängigen Veränderlichen errechnet werden soll:

$$Z(t) = \frac{z \cdot K \cdot t}{c}, \text{ falls } t = T \rightarrow Z = \frac{z \cdot K \cdot T}{c}.$$

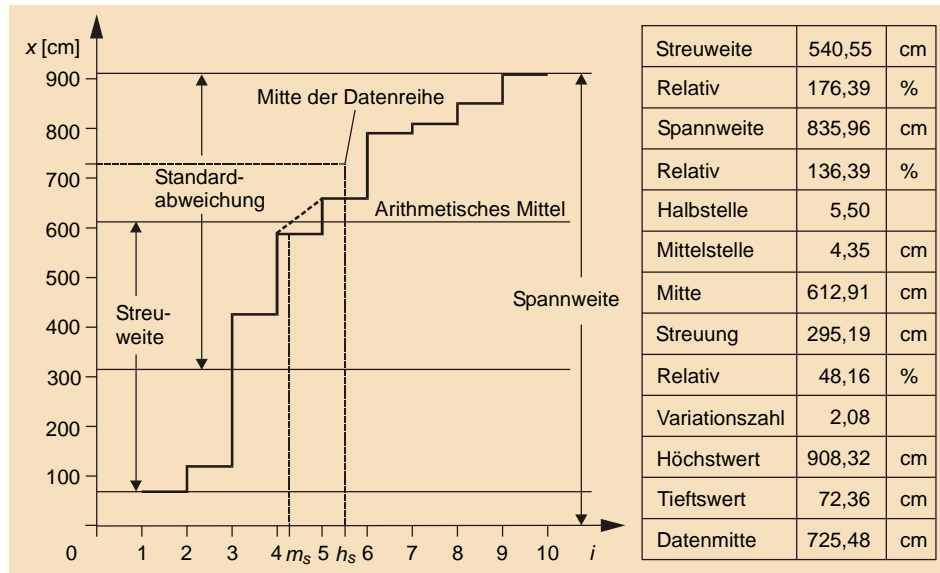


Abbildung 20: Größen des arithmetischen Mittels einer Zahlenreihe

Gleichung: Besteht aus durch Gleichheitszeichen getrennten Termen: $T_l = T_r$.

Gleichungen, die aus Zahlen bestehen, stellen eine wahre Aussage dar, wie z.B.:

$$T_l = 14 - 5, \quad T_r = 6 + 3 \rightarrow T_l = T_r.$$

Eine Bestimmungsgleichung liegt vor, wenn Veränderliche in Termen stehen, wie z.B.:

$$T_l = 14 - 5 \cdot x, \quad T_r = 1 + 3, \quad T_l = T_r \rightarrow 14 - 4 = 5 \cdot x, \quad x = \frac{14 - 4}{5} = 2.$$

Die identische Gleichung bezeichnet die Umformung eines Terms, wie z.B.:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2.$$

Die mathematischen Aussagen sollen nicht auf Voraussetzungen an anderen Stellen beruhen und aus sich selbst heraus erklärt, verbessert sowie verdeutlicht (Bilder, Diagramme, Tabellen) werden. Zwischenschritte sind anzugeben, Axiome⁸¹, Aus-

⁸¹ Axiome sind widerspruchsfrei, von anderen Aussagen unabhängig, inhaltlich vollständig, unangreifbar und nicht zu begründen, weil jede Begründung selbst wieder zu begründen wäre (Zirkelerklärung), wie z.B.: „Eine Menge ist die Zusammenfassung bestimmter, wohl unterschiedener Objekte unserer Anschauung und unseres Denkens – welche Elemente der Menge genannt werden – zu einem Ganzen.“ Cantor, S. 3. [4]

drücke usw. zu erläutern. Anglizismen sind dort, wo es deutsche Begriffe gibt, zu vermeiden, ebenso Mehrdeutigkeiten⁸² sowie die ungleiche Häufung mathematischer und sprachlicher Zeichen⁸³. Die Geschlossenheit der Ausdrücke (elementarisches Merkmal), die Logik ihrer Verknüpfungen (systemisches Merkmal), die Speicherverfügbarkeit (dynamisches Merkmal) und die fristgerechte Ausführbarkeit der Berechnungen (kapazitives Merkmal) sind zu gewährleisten. Auch Beweise falscher Lösungswege, widersprüchliche Hypothesen usw. besitzen wissenschaftlichen Wert, z.B., dass es nicht sinnvoll ist, eine Problemstellung weiter zu verfolgen.

Mathematische Schriftsätze in betriebswirtschaftlichen Schriften geben nicht nur Erkenntnisse wieder, sondern sind erheblicher Bestandteil der Wissensgewinnung. Die aus quantitativen Strukturen der untersuchten Qualitäten gewonnene strenge logische Begründung neuer Erkenntnisse ist eine ertragreiche wissenschaftliche Quelle. Für den Betriebswirtschaftler, der dies erkannt hat, sollte für die Anwendung der Mathematik gelten: „Ein Mathematiker schafft, ähnlich wie ein Maler oder ein Dichter, Strukturen (Patterns). ... Die Strukturen, die ein Mathematiker schafft, müssen so wie die der Maler und Dichter schön sein. ... Schönheit ist der erste Test: Für hässliche Mathematik gibt es keinen dauerhaften Platz auf der Welt.“⁸⁴

Danksagung

Hinweise des Herrn Professor Wenzl⁸⁵ zum Schriftsatz und des Herrn Kollegen Nollau⁸⁶ zur Mathematik waren eine wertvolle Hilfe bei der Abfassung des Beitrages. Dafür, in betagter „Ruhestellung“ hinzugelernt zu haben, bedanke ich mich sehr herzlich.

⁸² Was bedeutet die Zuordnung der Interaktion zwischen einer unabhängigen Veränderlichen, wie z.B. einem Sitzplatz, und einer abhängigen, wie z.B. einem Besucher? Eindeutig bei einseitiger Bedingtheit. D. h.: Besucher Y erwirbt eine Sitzplatzkarte X und kann jeden freien Platz besetzen: $Y \rightarrow X$, aber nicht $X \rightarrow Y$, eineindeutig bei zweiseitiger Bedingtheit: Besucher Y mit der Karte Block A, Reihe 3, Platz 7, sitzt im Block A, Reihe 3, Platz 7: $Y \leftrightarrow X$.

⁸³ Im Mathematiktext stehen Zahlen: 3, Wurzel $25 = 5$ usw., in der Schrift Worte: drei, fünf, fünfundzwanzig usw.

⁸⁴ G. H. Hardy, englischer Mathematiker (1877 – 1947). In: Beutelspacher 2, S. 52. [2]

⁸⁵ Ordentliches Mitglied der Sudetendeutschen Akademie der Wissenschaften und Künste, Naturwissenschaftliche Klasse.

⁸⁶ Seit 1994 Vorstand des Konzils der TUD, 2000 ... 2006 Prodekan der Fachrichtung Mathematik, 2004 ... 05 Vizepräsident der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV), seit 2006 Honorarprofessor E.h. TU Wien

Literatur

- [1] Albach H.: *Allgemeine Betriebswirtschaftslehre*. Wiesbaden: 2000
- [2] Beutelspacher A.: 1.: *Das ist o. B. d. A. trivial*. Wiesbaden: 2009
- [3] Beutelspacher A.: 2.: *In Mathe war ich immer schlecht*. Wiesbaden: 2009
- [4] Cantor G.: *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*. Berlin: 1952
- [5] Ducrog A.: *Die Entdeckung der Kybernetik*. Frankfurt (Main): 1959
- [6] *Duden Die deutsche Rechtschreibung*. Mannheim Leipzig Wien Zürich 1991
- [7] Egermayer F., Förster E.: *Korrelations- und Regressionsanalyse*. Berlin: 1966
- [8] Erler J.: 1: *Leistungssteigerung und Mittelwertsautomatik*. Dissertation Göttingen, 1984
- [9] Erler J.: 2: *Durchschnittlicher Zeitverbrauch oder Zeitbedarf bei Durchschnittsleistung?* In: Zeitschrift für Arbeitswissenschaft, Sonderdruck, Köln: 1984
- [10] Fritsch R.: *Georg Pick und Ludwig Berwald – Zwei Mathematiker an der Deutschen Universität in Prag*. In: Schriften der Sudetendeutschen Akademie der Wissenschaften und Künste, Band 22, Forschungsbeiträge der Naturwissenschaftlichen Klasse. München 2001
- [11] Führer Ch.: *Wirtschaftsmathematik*. Herne 2012
- [12] Gallati R.R.: *Verzinsliche Wertpapiere*. Wiesbaden 2011
- [13] Gräbe H.G.: Vortrag „*Mathematische und informatische Kompetenz im Computerzeitalter*“. 3. Tagung „Begabtenförderung in Mathematik“, Mathematisches Institut der Universität Leipzig, 29. - 31. März 2001
- [14] Häberle S.: *Mittelwertsautomatik und Verdienstchancen – ein Zusammenhang für die Akkordarbeit*. In: Forsttechnische Informationen 1967;9:74-76
- [15] Halmos P.R.: *Wie schreibt man mathematische Texte*. Leipzig: 1977
- [16] Kant I.: Logik, Einleitung. III. Begriff von der Philosophie überhaupt.
- [17] Kohlöffel K.M.: *Strategisches Management*. München, Wien: 2002
- [18] Kreck M.: Eine Sprache, die keinen Widerspruch duldet In: *F.A.Z.*, 02.01.2008, Nr. 1.
- [19] Kulke V.: Der Mathematainer von Gießen, Ein neues Museum der Rechenkunst soll uns die Zahlen ohne Formeln nahe bringen. *DIE WELT*, 21. November 2002
- [20] Lichtenberg G.Ch.: *Aphorismen, Essays, Briefe*. Leipzig: 1963
- [21] Mann W.: *Kreativität und Technik*. In: Schriften der Sudetendeutschen Akademie der Wissenschaften und Künste, Band 19, Forschungsbeiträge der Naturwissenschaftlichen Klasse. München: 1998
- [22] Marx K.: *Das Kapital*. Zweiter Band. In: MEW. Berlin 1963
- [23] Müller B.: „Michael Hagner diagnostiziert eine Krise der Urteilskraft“. *Süddeutsche Zeitung*. 03.09.2012.
- [24] Neumann K., Morlock M.: *Operation Research*. München Wien: 1993
- [25] Oppitz V.: Zur Berechnung einer wirtschaftlichen Losanzahl. In: *Werkstatt und Betrieb* 1966; Heft 11:771-779
- [26] Oppitz V.: Modellierter Darstellung von zeitabhängigen Prozessen mit endlicher Prozessdauer. In: *Fertigungstechnik und Betrieb* 1969; Heft 8:464-473
- [27] Oppitz V.: Die Bestimmung der Parameter der logistischen Funktion mit einem R 300-ALGOL-Programm". In: *RATIO* 1971; Heft 7
- [28] Oppitz V.: *Grundlagen und ausgewählte ökonomisch-mathematische Aspekte der Erzeugnisplanung in metallverarbeitenden Betrieben mit Serienfertigung*. Fakultät für Gesellschaftswissenschaften des Wissenschaftsrates der Technischen Universität Dresden. Dissertation – Promotionsordnung B – Tag der Einreichung: 15. März 1977
- [29] Oppitz V.: *Gabler Lexikon Wirtschaftlichkeitsrechnung*. Wiesbaden: 1995 Verlag
- [30] Oppitz V.: *Anwendung moderner Instrumentarien in der Unternehmensführung (Organisches Wachstum und Effektivverzinsung von Kapital; Investitionen unter Beachtung von Natureinflüssen; Normalzeitvorgabe und Arbeitsplanung für Land- und Forstarbeiten; Betriebsmittelhaltung unter Naturbedingungen)*. Vortrag beim „Sachverständigen-Kuratorium, Sparte Landwirtschaft.“ Bonn 4. Dezember 1996, 8.30 – 12.30 Uhr

- [31] Oppitz V.: Nominal und effektiv verzinst – ein nur finanzwirtschaftliches Problem? In: *Zeitschrift für Betriebswirtschaft* 1999; 69
- [32] Oppitz V.: Vorfälligkeitssentgelt bei vorzeitiger Kredittilgung, Teil I: Typbeispiele des Vorfälligkeitsschadens. In: *Kredit- & Ratingpraxis*, Heft 4/2002; Teil II: Berechnungsmodelle des Vorfälligkeitssentgeltes. In: *Kredit- & Ratingpraxis*, Heft 5/2002; Teil III: Unterjährliche Zinssatzformen als Entgelttreiber". In: *Kredit- & Ratingpraxis*, Heft 6/2002.
- [33] Oppitz V.: *Differentialgleichungen wirtschaftlichen Wachstums*. In: Management EIPOS: Europäisches Institut für postgraduale Bildung an der TU Dresden e.V., Heft 1/2007.
- [34] Oppitz V.: Hebelwirkung der Kapitalstruktur. In: *Kredit & Rating Praxis* 2009; Jahrgang 39, Heft 4
- [35] Oppitz V.: Kreditzinssatz und Risikoparameter. In: *Kredit & Rating Praxis* 2010; Jahrgang 40, Heft 5
- [36] Oppitz V.: 2011/1: Betriebsökonomisches Lexikon: Unternehmensstatistik. Berlin 2011
- [37] Oppitz V.: 2011/2: Betriebsökonomisches Lexikon: Wirtschaftsmathematik. Berlin 2011
- [38] Oppitz V.: Ökonometrie der Durationen. In: *Kredit & Rating Praxis* 2012; Heft 6
- [39] Oppitz V.: Eugen-Sänger-Impuls, Ein Beitrag zur mathematischen Serienplanung. In: Schriften der Sudetendeutschen Akademie der Wissenschaften und Künste, Band 34, Forschungsbeiträge der Naturwissenschaftlichen Klasse. München: 2014
- [40] Planck M.: *Wissenschaftliche Selbstbiographie*. Leipzig: 1948
- [41] Planck M.: *Scheinprobleme der Wissenschaft*. Tübingen: 1952
- [42] Polya G.: *Mathematik und plausibles Schließen*. Basel: 1969
- [43] Polya G.: *Schule des Denkens*. Tübingen: 2010
- [44] Popper K.: *Logik der Forschung*. Berlin: 1971
- [45] Schierenbeck H., Lister M., Kirmße St.: *Ertragsorientiertes Bankmanagement*. Band 2: Risiko-Controlling und integrierte Rendite-/Risikosteuerung. Wiesbaden: 2008
- [46] Spremann K., Gantenbein P.: *Zinsen, Anleihen, Kredite*. München: 2007
- [47] Steiner M., Bruns Ch.: *Wertpapier-Management*. Stuttgart: 2000
- [48] Weber F.: *Wie Kurt Gödel die Mathematik revolutionierte*. In: Schriften der Sudetendeutschen Akademie der Wissenschaften und Künste, Band 2, Sudetendeutsch Beiträge zur Naturwissenschaft und Technik. München 1981
- [49] Zielcke A.: Das Monster in uns. *Süddeutsche Zeitung* Nr. 40, München, Samstag/Sonntag, 16./17 Februar 2013