

Schriften der Sudetendeutschen Akademie  
der Wissenschaften und Künste

Band 37

Forschungsbeiträge der Naturwissenschaftlichen Klasse

VOLKER OPPITZ<sup>1</sup>

**Bestimmtheit und Zufall –  
Beteiligungsfunktionen in der Wirtschaftsmathematik**

*„Was rührt hierbei aus Ursachen  
und was vom Zufall her?“<sup>2</sup>*

*Zusammenfassung*

Anwendungsfragen wirtschaftsmathematischer Algorithmen, Hinweise zum Verständnis mathematischer Größen, Darstellung einiger Praxisfälle der Behandlung von Häufigkeitsverteilungen mit Beteiligungs- statt Wahrscheinlichkeitsfunktionen und Erläuterung theoretischer Grundlagen wirtschaftsmathematischer Beteiligungsfunktionen.

*Summary*

*System and Randomness –  
Participation functions in economical mathematics*

Application of algorithms, comments on understanding mathematical quantities depicting some real cases dealing with frequency distribution with participation instead of probability functions, and detailed explanation of theoretical foundations of participation functions in economical mathematics.

*Bestimmungs-, Stör- und Zufallsgrößen*

*Übersicht*

Die Wirtschaft braucht mathematische Verfahren, um Ereignisse und Entwicklungen zu analysieren, Ziele festzulegen, Entscheidungen zu treffen, Toleranzen abzuschätzen

---

<sup>1</sup> Der Beitrag einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Autors unzulässig und strafbar, besonders Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen, die elektronische Einspeicherung und Verarbeitung. Die Wiedergabe hier benutzter Gebrauchs-, Handels-, Warenbezeichnungen usw. berechtigt nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und benutzt werden dürften. Anregungen und kritische Hinweise für die Vervollkommnung der Schrift werden dankbar entgegengenommen.

<sup>2</sup> Lichtenberg, S.160

zen und Störungen zu bewältigen. Bei der MINT<sup>3</sup>-Integration in Wirtschafts- und Produktionsprozesse (Industrie 4.0) betrifft das Probleme, die durch Gewissheit und Störung, seltener durch Zufall gekennzeichnet sind. Mit *Gewissheit* verbindet sich Bestimmtes in begrenzten Abweichungen. Schädliche Einflüsse bedeuten *Störungen*, Bedrohliches, Fragwürdiges, Unsicheres. *Zufälliges* erscheint ohne erklärbares Bedingungsgefüge und ist wandelbar. Die Begriffe beschreiben Bestimmungs-, Störungs- oder Zufallsgrößen wirtschaftlicher Begebenheiten, über die annähernd Genaueres, Unvermitteltes oder Ungefähreres ausgesagt werden kann.

I. Allg. reicht die formelle Funktionalisierung nicht aus, um zweckmäßige Festlegungen über die mathematische Algorithmierung wirtschaftlicher Prozesse zu treffen, schon gar nicht bei schwierigen Problemstellungen. Die Bestimmung algorithmischer Lösungen erfordert die theoretische Durchdringung der Interaktionen und Klarheit über das Wesen der verfügbaren Größen, um sich mit den Erscheinungsformen der Gewissheit, Störung und Zufälligkeit auseinanderzusetzen und deren Wirkungen zu bewältigen. Das verlangt die Anerkennung des Wesens und der Bedingtheit der Ereignisse entsprechend der „...Lehre von den allgemeinen Beziehungen, Veränderungen und Entwicklungen in der Natur, Gesellschaft und im Denken...“ (Kimmerle, S.250). Dabei auftretende quantitative Erscheinungsformen sind:

- *Bestimmungsgrößen* [auch Zahlenreihe genannt] haben ein Bedingungsgefüge. Die Approximation ihrer Interaktionen mit Beteiligungsfunktionen liefert ihren Trend [Entwicklungsgesetz, mittleres Verhalten, Tendenz] und ihre Standardabweichung [Streuung].
- *Störgrößen* betreffen Abweichungen der Bestimmungsgrößen von der Organisiertheit des Bedingungsgefüges<sup>4</sup>, die durch logistische Maßnahmen im Ziel- und Lenkungssystem abzuwehren oder auszugleichen sind.
- *Zufallsgrößen* besitzen kein Bedingungsgefüge, sie werden mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Verteilungs- und Dichtefunktionen beschrieben, ausgewertet und erklärt.

Bei einem Bedingungsgefüge, das sich nicht ändert, liegen gleichartige Bestimmungsgrößen vor: So besitzt z.B. jede Glühlampe die gleiche mittlere Lebensdauer – wie jedes andere Werkstück – und eine Toleranzbreite, weil sich gewissen Schwankungen unterliegende Einflussgrößen im Bedingungsgefüge befinden, die auf den Trend und die Streuung einwirken.

Während bei der Anwendung der Warteschlangentheorie<sup>5</sup> im Wesentlichen einheitliche Auffassungen über „zufällige Ereignisse“ bestehen, gibt es Klärungsbedarf für Bestimmungsgrößen mit schwer definierbarem Bedingungsgefüge, wenn sie deswegen als Zufallsgrößen gedeutet und durch Entscheidungen beeinflussbar<sup>6</sup> sind. I. Allg. treten in der Wirtschaftspraxis fast ausschließlich Bestimmungsgrößen auf; deshalb ist es sinnvoll, wahrscheinlichkeitstheoretische Verteilungen auf ihre Überführung in Beteiligungsfunktionen zu überprüfen.

<sup>3</sup> Mathematik, Informationstechnik, Naturwissenschaften und Technik

<sup>4</sup> Die Organisiertheit des Bedingungsgefüges gewährleisten Lenkungssysteme durch Regeln und Steuern.

<sup>5</sup> Warteschlangentheorie, Bestandteil der Wahrscheinlichkeits- und Bedienungstheorie (Oppitz 2011/2, S.335/384)

<sup>6</sup> An den „Risiko-Vorstand“ werden Verluste delegiert, die Chancen reklamieren die Vorstände für sich!

### Bestimmungsgrößen

Gewissheit drückt sich als Abbildung des Trends der *Bestimmungsgrößen* in gleichabständigen Toleranzen durch Beteiligungsfunktionen aus, wie z.B. Differentialgleichungen [DGL], Funktionen, Gleichungen. Bestimmungsgrößen sind in natürlichen oder wirtschaftlichen Prozessen beobachtete, gemessene, vor- oder nachkalkulierte Daten, aufbereitet und verwendet von PC-Kalkulatoren. So stellen kalkulierte Kosten eine Soll-Größe dar. Ihre Nachkalkulation weist teilweise davon abweichende Ist-Kosten aus, verursacht z.B. durch Maschinentoleranzen, Materialunterschiede, Werkzeugverschleiß. Änderungen im Bedingungsgefüge, wie z.B. besseres Material, Robotereinsatz, beeinflussen Trend und Streuung. Die Ist-Schwankungen um das Soll-Maß erscheinen manchen Betrachtern als zufällig, obwohl sie durch Verbesserungen im Bedingungsgefüge verringert werden können: Anschaffung besserer Maschinen, Prozessintegration des Messsystems usw. Das geschieht bewusst nach dem Gebot: So genau wie notwendig, so billig wie möglich<sup>7</sup>, um ein Kostenproblem zu lösen (Abb. 1).

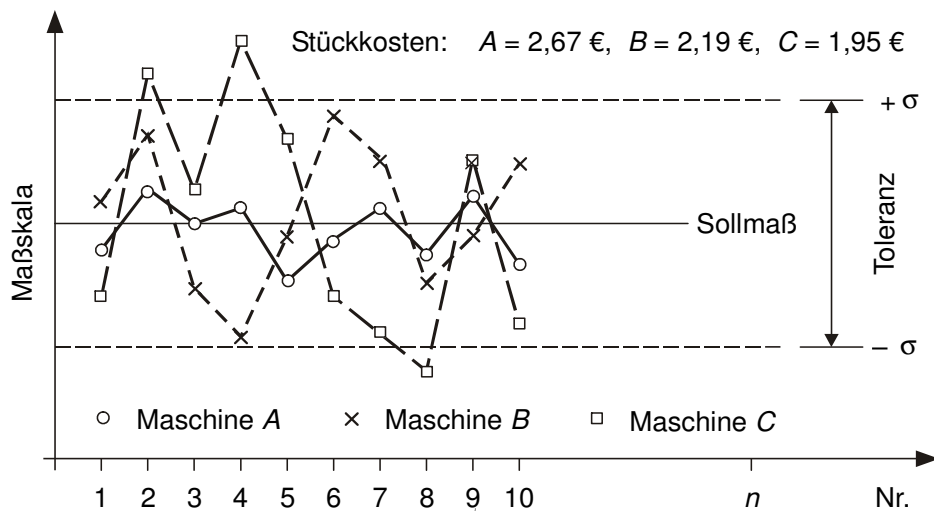


Abbildung 1: Fertigungstoleranzen bei verschiedenen Betriebsmitteln

### Zufallsgrößen

Zufälle erscheinen ohne ersichtliche Ursachen. Es ist nicht vorhersehbar, welches Zufallsereignis wie oft oder ob es überhaupt eintreten wird. Die mit der Wahrscheinlichkeit verbundene Ungewissheit folgt aus der Unbestimmtheit der Ereignisse. Die Behandlung von Zufallsgrößen beruht auf probabilistischen Algorithmen für die Approximation von Häufigkeits- durch Wahrscheinlichkeitsverteilungen. In der Wirt-

<sup>7</sup> Z.B. sind höhere Kosten für geringere Toleranzen unzulässig, wenn sie keine Gewinn- oder Umsatzerhöhung bewirken.

schaftspraxis sind Zufallsgrößen hauptsächlich bei sozial beeinflussten Ereignissen mit unbekanntem Eigenschaften anzutreffen, wie z.B. Arbeitsausfälle, Unfälle. Aus Beobachtungen gewonnene Zufallsgrößen heißen i. Allg. *Proben*, erfasst in einer Zufallsstichprobe [ZSP]; sie bilden eine *Massenerscheinung* ab, wenn sie beliebig oft wiederholt oder in beliebig vielen gleichartigen Erscheinungen untersucht<sup>8</sup> werden. Meist wirken Einflüsse ein, die im Einzelnen zwar gering bis nicht wahrnehmbar sind, deren Gesamtwirkung und Wahrscheinlichkeit sich jedoch von Probe zu Probe verändern kann: Es ergibt sich ein zufälliges, im Einzelnen nicht vorhersehbares Ergebnis, der *Zufallscharakter* einer Massenerscheinung. Je größer die ZSP häufigkeitsverteilter Zufallsgrößen ist, desto verlässlicher kann auf eine Wahrscheinlichkeitsverteilung geschlossen werden und desto kleiner ist der Approximationsfehler. Zufällige Ereignisse können wiederkehren oder u.U. (versuchsweise) wiederholt werden und andere Häufigkeitsverteilungen annehmen: Solche Rückkopplungen sind mehrheitlich zufälliger Art und unkalkulierbar.

Grundlegendes Merkmal der Glücksspiele<sup>9</sup>, wie z.B. Lotto, Roulette, Würfeln, ist trotz Verhaltensregeln die Zufälligkeit der Ereignisse, die sich einander ausschließen und die gleiche Chance besitzen, vom Anwender gezogen zu werden. Ihnen ist gemeinsam, dass sie über zufällige Ausgänge verfügen, wie z.B. Lotto (1...35), Roulette (0...36), Würfeln (1 ...6). Die Anzahl „günstiger“ zur Anzahl aller Ausgänge bezeichnet die Trefferchance (Wahrscheinlichkeit eines Treffers), unabhängig davon, dass es ziemlich unmöglich oder willkürlich ist, zufällige Ereignisse in Elemente zu zerlegen und Chancengleichheit zu gewährleisten: Die relativen Häufigkeiten streben einem Grenzwert zu und erfüllen die statistische Definition der Wahrscheinlichkeit. Notwendig ist eine ausreichend große ZSP aus einer Gesamtheit.

Der klassische Begriff der Wahrscheinlichkeit wurde verwendet, ehe seine Begründung aus der relativen Häufigkeit erfolgte. Ihm liegt eine Gesamtheit der *Elementarereignisse*, eine Menge an Beobachtungen [Proben] zugrunde. Elementarereignisse schließen sich gegenseitig aus, jedes hat die gleiche Eintrittschance und kann nicht gleichzeitig mit einem anderen eintreten. D.h. kein Elementarereignis wird bevorzugt, weil es keine Ursachen gibt, die den Eintritt eines bestimmten Elementarereignisses begünstigen könnten. Bei Kombination von 90 Elementen zur 5. Klasse ohne Wiederholung ergibt sich die Anzahl aller Ereignisse aus:

$$n = \binom{90}{5} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 43949268.$$

Die Wahrscheinlichkeit  $P(A)$  des Eintretens kombinierter Zahlen für das Ereignis  $A$  folgt aus:

<sup>8</sup> Wie z.B. einen Würfel tausendmal oder tausend Würfel einmal bei im Wesentlichen gleichen Bedingungen zu werfen.

<sup>9</sup> Die mathematische Behandlung des Spielverhaltens ist Gegenstand der Spieltheorie. Die Kenntnis der Wahrscheinlichkeiten wird erst bei Chancengleichheit und bei ausreichend vielen Proben erlangt (Nollau/Oppitz, S.283/286).

$$P(A) = \frac{\text{Erfolgsanzahl für das Ereignis } A}{\text{Anzahl aller Elementarereignisse}}$$

Die  $n$  Kombinationen besitzen die Eintrittswahrscheinlichkeit  $1/n = 1/43949268 = 2,27762 \cdot 10^{-8}$ .

Im Unterschied zur statistischen setzt die klassische Bestimmung der Wahrscheinlichkeit die Kenntnis der Anzahl der Elementarereignisse voraus, die i. Allg. nur bei endlich oder abzählbar unendlich vielen Proben erlangt werden kann, ihr axiomatischer Aufbau gewährleistet eine klare mathematische Behandlung zufälliger Erscheinungen (Oppitz 1995, S.562).

### Störgrößen

In der Wirtschaftspraxis auftretende Störungen verursachen Abweichungen von der Zielerreichung. Sie werden i. Allg. bedienungstheoretisch untersucht<sup>10</sup>. Es handelt sich um regellose, nicht algorithmierbare Ereignisse. Strategische Ursachen sind unzureichende Übereinstimmungen der Bestimmungsgrößen<sup>11</sup> mit den Potenzialen des Bedingungsgefüges, operative nicht vorhersehbare Kapazitätsausfälle oder im Bedingungsgefüge auftretende Zufallsgrößen<sup>12</sup>.

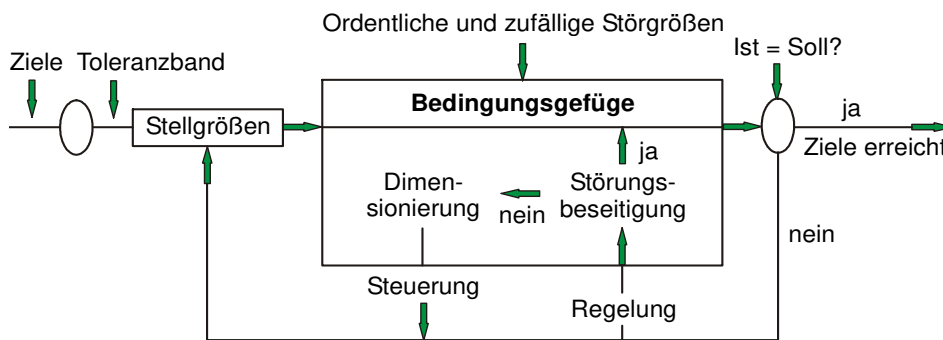


Abbildung 2: Lenkungssystem der Regelung und Steuerung

Die Abwehr von Störungen erfolgt durch Regelung und Steuerung. Im Zielbereich des Systems und im Bedingungsgefüge der Interaktionen werden strategische und operative Konzepte zur Störungsbeseitigung umgesetzt. Die i.d.R. selbsttätige Re-

<sup>10</sup> Ihre mathematische Verallgemeinerung nimmt die Logistikrechnung vor (Oppitz 2011/2, S.335/384).

<sup>11</sup> „Die Vorgänge wie Ankunft, Verweilen und Erledigen der Forderungen verlaufen regelmäßig, sind einfach gestaltet und optimal zu organisieren, wie z.B.: Alle zwei Minuten trifft eine Forderung ein, die ein Bedienkanal in acht Minuten erfüllen kann. Vier Bedienkanäle reichen aus, um Wartezeiten bei den Forderungen wegen besetzter Bedienkanäle und bei den Bedienkanälen wegen fehlender Forderungen zu vermeiden.“ (Oppitz 1995, S.58).

<sup>12</sup> „Das stationäre, geschlossene Wartesystem oder das reine Verlustsystem fertigen Warteschlangen mit zufälligem Zeitverhalten ab. Mindestens die Ankunft oder die Abfertigung der Forderungen ist zufällig ...“ (Oppitz 1995, S.59).

gelung umfasst die Inangsetzung interner Reservekapazitäten. Im Falle des Nichtgelingens der Entstörung setzt die Steuerung ein, um die Potenziale des Bedingungsgefüges zu erhöhen und, falls das nicht ausreicht, die Zielgrößen an die neuen Bedingungen anzupassen (Abb. 2).

### *Vom Zufall zur Beteiligungsfunktion*

#### *Problemlage*

Bei manchen wahrscheinlichkeitstheoretisch bearbeiteten Lösungen ist es nach genauer Analyse möglich und begründbar, das Problem mit Beteiligungsfunktionen zu modellieren. Grundlage für die Entscheidung ist die Frage, ob den zugrunde liegenden Zufallsgrößen ein Bedingungsgefüge zugeordnet werden kann. Dann ist es möglich, den vermuteten Zufallsgrößen, begründet durch die Kenntnis eines Bedingungsgefüges, die Eigenschaften von Bestimmungsgrößen zuzuerkennen. Das „Entweder – Oder“ besteht im Auseinanderbringen des Zufalls ohne Bedingungsgefüge und der Bestimmtheit mit Bedingungsgefüge.

Mathematische Verteilungsgesetze für Zufallsgrößen sind Ausdruck der nach einer großen Serie von Untersuchungen ermittelten inneren Ordnung einer Massenerscheinung. Sie verdeutlichen die zufällige Art und Weise, in der sich die Gesetzmäßigkeit durchsetzt, verbunden mit der Möglichkeit, tiefer in die Gesetzmäßigkeiten von Zufallserscheinungen einzudringen.

Die Modellierung mit Beteiligungsfunktionen deckt in mathematischer Beschreibung die Verteilung der Bestimmungsgrößen und die Zusammenhänge der Interaktionen zum Bedingungsgefüge auf. Es geht um die Erweiterung theoretischer Einsichten, die in der mathematischen Erkenntnisgewinnung stecken, um die methodische Grundlage für Entscheidungen, die Einflussnahmen auf wirtschaftliche Interaktionen ermöglicht und Verantwortlichkeit erzeugt! Ein Zusammenbringen von Bestimmtheit und Zufall setzt dagegen bedienungstheoretisch zu lösende Problemstellungen voraus.

Aus Vergleichsgründen folgen Beispiele zur Analyse der Annahme, es handle sich unergründlicher Ursachen wegen um Zufallsgrößen, obwohl ein Bedingungsgefüge beteiligt ist. Die Bestimmungsgrößen mit Bedingungsgefüge werden mit Beteiligungsfunktionen modelliert.

#### *Normalverteilte oder organisierte Durchlaufdauer?*

In Literaturquellen zur Unternehmensführung tauchen Beiträge unter dem Leitbegriff *Six Sigma* mit der Aussage auf, dass die statistische Analyse und Überwachung der Arbeitsvorgänge mit der *probabilistischen Normalverteilung* eine grundlegend neue Methode der Unternehmensführung darstellt. U.a. wird als Beispiel dafür die organisatorisch-technologisch bedingte Durchlaufdauer der Erzeugnisse in der Fertigung als *normalverteilte* Zufallsgröße behandelt. Das Thema wird in Dissertationen untersucht, erscheint als wichtige wissenschaftliche Methode der Prozessbe-

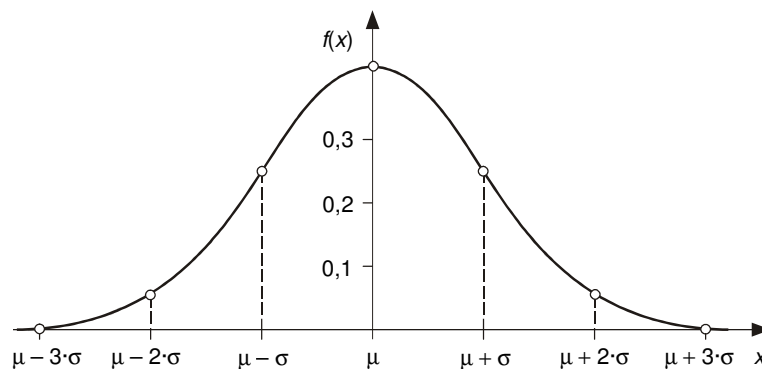
herrschaft und verleitet geradezu zur umfassenden Theorienbildung: „*Definition Six Sigma. In der Statistik ist der griechische Buchstabe Sigma ( $\sigma$ ) das Symbol und die Kenngröße der Standardabweichung. Zusätzlich ist die Standardabweichung neben dem Mittelwert ( $\mu$ ) einer der beiden Parameter der Gauß'schen Glockenkurve.*“ So „...versucht das Six Sigma-Konzept, die Durchlaufzeit (DLZ) zu minimieren und einen möglichst hohen Nutzungszweck zu erzielen.“ (Krolikowski, S.9).

Die Normalverteilung hat allerdings mit der Durchlaufdauer in Unternehmen wenig, besser gesagt gar nichts zu tun. Sie beruht auf der Theorie der Beobachtungsfehler [Moivre, Laplace und Gauß]. Mehrfach wiederholte Messungen ergeben aufgrund verschiedener, nicht überprüfbarer Einflüsse<sup>13</sup> nicht immer den gleichen Wert. Mit Hilfe der *Grenzwertsätze* lassen sich *Fehler-Verteilungen* aus einer Summe zufälliger, voneinander unabhängiger Einflüsse finden. Der *zentrale Grenzwertsatz* sagt aus, dass unter bestimmten Voraussetzungen jede Summe  $\sum X_i$  voneinander unabhängiger Zufallsgrößen  $X_i$  asymptotisch normal verteilt ist, wenn

- sehr viele zufällige Einflüsse vorhanden sind, die für sich allein genommen eine Zufallsgröße  $X_i$  mit sehr kleiner Wirkung darstellen und vernachlässigbar wären;
- die Anzahl der sich nicht gegenseitig beeinflussenden zufälligen Einflüsse  $X_i$  und deren Einzelverteilung unbekannt sind.

Bei stetiger Zufallsgröße (Annahme unendlich vieler Werte) ergibt sich die Dichtefunktion  $f(x)$  (Abb. 3) und Verteilungsfunktion  $F(x)$  mit Erwartungswert  $\mu$  und Streuung  $\sigma$ :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}}, \quad F(x) = \int f(x) \cdot dx, \quad x \in [-\infty, \infty].$$



*Abbildung 3: Dichtefunktion der normierten Normalverteilung (sog. Glockenkurve)*

Der Wert der Dichtefunktion  $f(x)$  am Punkt  $x$  besitzt keine Dichte; Dichten entstehen über Punktabständen (wie z.B.  $x + dx$ ) und bezeichnen Wahrscheinlichkeiten.

<sup>13</sup> Schwankungen der Raumtemperatur, Erschütterungen der Umgebung, Staubablagerungen, Beobachtungsfehler usw.



Die sogenannte  $3\sigma$ -Regel z.B. besagt, dass die Zufallsgröße im Intervall  $\mu \pm 3\sigma = 99,73\%$ , im Intervalle  $\mu \pm 2\sigma = 95,45\%$  und im Intervall  $\mu \pm \sigma =$  (nur)  $68,27\%$  aller Werte annimmt. Besitzt die von der Dichtefunktion über  $x \in [-\infty, \infty]$  eingeschlossene Fläche den Wert eins, dann ist die Dichte im Intervall  $[x_1, x_2]$  die Wahrscheinlichkeit:  $P(x_1 \leq X < x_2) = P(X < x_2) - P(X < x_1)$ , dass die Zufallsgröße  $X$  einen Wert aus dem Intervall  $[x_1, x_2]$  annimmt (Abb. 4).

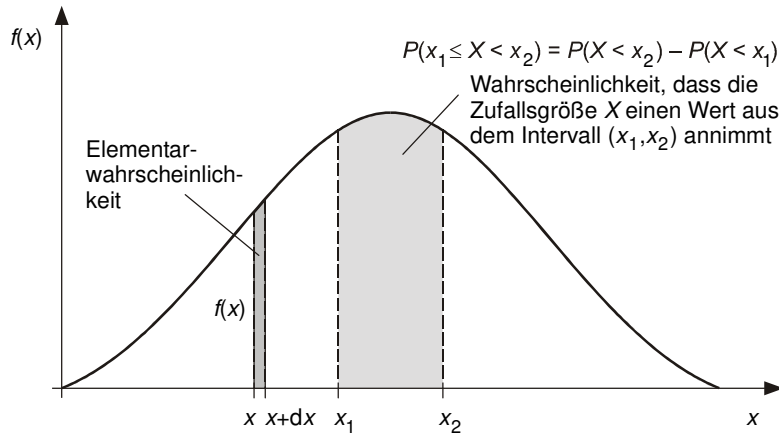


Abbildung 4: Dichtefunktion und Wahrscheinlichkeit

Die Durchlaufdauer (DLZ) in der Fertigung ist eine Bestimmungsgröße mit definiertem Bedingungsgefüge (Abb. 5) und keine Zufallsgröße. Sie wird unter Berücksichtigung der Anzahl der Arbeitsstufen und der Größe der Zeitelemente kalkuliert.

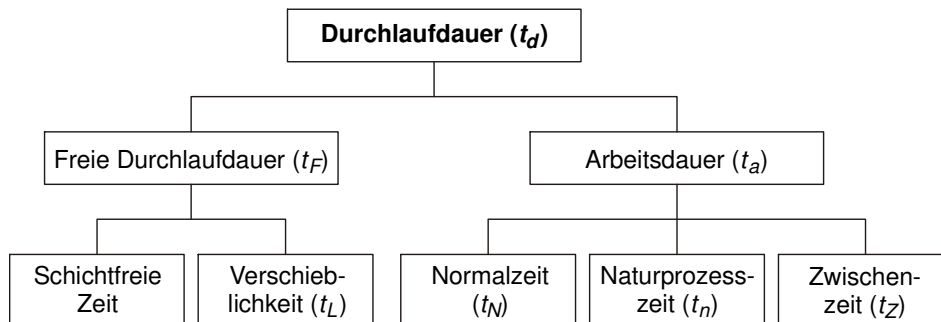


Abbildung 5: DLZ: Eingang der Zulieferungen bis zur Übergabe der Produkte an den Vertrieb

Die Durchlaufdauer  $y(q)$  der Produkte  $q = 1, 2, \dots, Q$  (Seriengröße) kann mit einer DGL beschrieben werden: Die relative Verkürzung der Durchlaufdauer  $-dy/y$  einer Serie von Erzeugnissen verläuft proportional  $\lambda$  zur relativ wachsenden Produktmenge  $dq/q$  in Folge der Einarbeitung des Personals. Die Lösung der DGL ergibt die  $\zeta$ -Durationsfunktion und die Regressionsanalyse [SDE] mit Praxisdaten (vgl.

Oppitz 2015, S.19); diese liefert die Werte der Funktionsparameter: Die Durationskonstante  $y_0 = 290,35$  d bestimmt das Ausgangsniveau, der Durationsexponent  $\lambda = 0,09342$  die Abnahme der Durchlaufdauer, die Streuung ist  $\sigma = 7,83$  d. Die Streuung ist keineswegs „aus einer additiven Überlagerung einer Vielzahl (meist unabhängiger) zufälliger Einzeleffekte“ (Oppitz 2011/1, S.347) zu erklären, wie es die Normalverteilung voraussetzt, sondern aus Störungen im Bedingungsgefüge: Zwischen dem 32. ... 55. Produkt verursachte die Demontage elektronischer Baugruppen auf Grund „kalter Lötstellen“<sup>14</sup> mit Kontaktunsicherheiten und Funktionsstörungen die Streuungen (Abb. 6):

$$-\frac{dy}{y} = \lambda \cdot \frac{dq}{q}, \quad q \in [1, Q] \rightarrow -\int_1^Q \frac{dy}{y} = \lambda \cdot \int_1^Q \frac{dq}{q}, \quad y(q=1) = y_0 \rightarrow$$

$$y(q) = \frac{y_0}{q^\lambda}, \quad [\lambda, y_0] \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^n (y(q_i) - y_i)^2} \rightarrow \text{Min!} \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{n-2} \cdot \sum_{i=1}^n (y(q_i) - y_i)^2}.$$

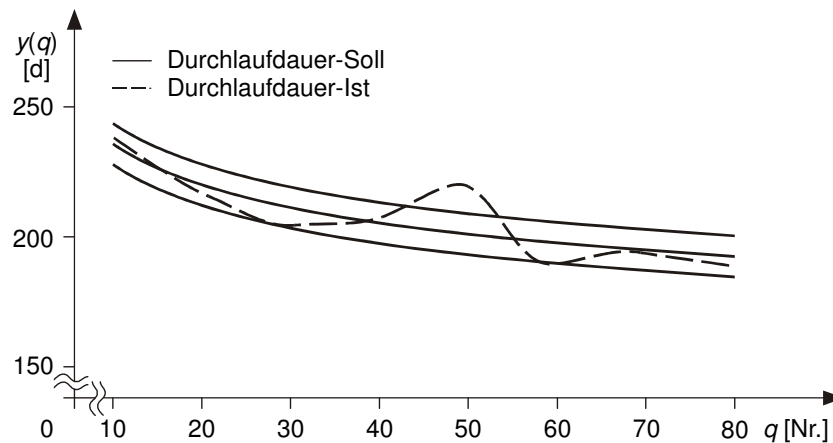


Abbildung 6: Kurve der Soll- und Ist- Durchlaufdauer in der Fertigung

### Normalverteilte Prüfungsnoten?

Sozialwissenschaftlich besitzen Noten eine normalverteilte symmetrische Ausprägung, obwohl der Definitionsbereich der Normalverteilung  $x \in [-\infty, \infty]$  zweiseitig ist, jener der Notenverteilung halbseitig, wie z.B.  $x \in [1, 5]$ : „Ergebnisse von Leistungsprüfungen ..., die sich entlang einer Merkmalsdimension in ganz charakteris-

<sup>14</sup> Lockere stoffschlüssige Verbindung zwischen Lot und Fügestelle; sie beeinträchtigen (unterbinden) die mechanischen und elektrischen Eigenschaften elektronischer Baugruppen, die zu dem hohen Wert des Sigma  $\sigma = 7,83$  d führten.

tischer Weise ... verteilen. Das Intervall, in dem der Mittelwert liegt, besitzt die größte Besetzungszahl, während die Besetzungszahlen der angrenzenden Intervalle immer kleiner werden, und zwar symmetrisch.“ (Sahner, S.21/22). Die Annahme gaußverteilter Prüfungsnoten (Abb. 7) [NCD] liegt vermutlich „*daran, dass die Normalverteilung der Noten die Lehrer von Verantwortung für den Lernerfolg frei spricht. Nur mäßiger Lernerfolg und schlechte Noten sind im Reich der Normalverteilung keine pädagogischen Niederlagen, sondern eben normal. Und Lehrer lernen, Tests so zu gestalten, dass es genug schlechte Noten gibt.*“ (Presseartikel).

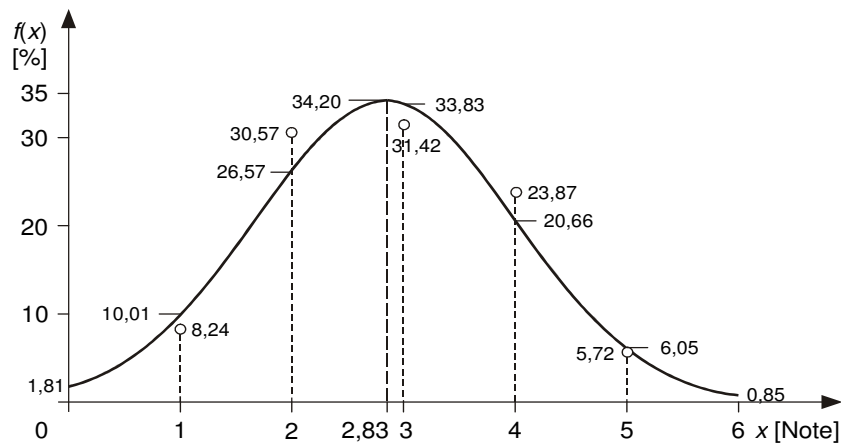
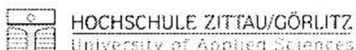


Abbildung 7: Beispielkurve der Dichtefunktion der Normalverteilung für Klausurnoten

Klausuren in Mathematik und Statistik lassen sich einheitlich gut bewerten. Stoffinhalte und Leistungsnachweise sind strukturiert und versachlicht, subjektive Einflüsse der Lehrkraft so gut wie ausgeschlossen, die Notenvergabe ist methodisch objektiviert. Bei falschen Lösungen ergibt sich die Note aus Teilbewertungen: Richtige Wahl des Modells, der Software und Variablenwerte? Internetttests über eine bessere Geschlossenheit der Stoffvermittlung am Europäischen Institut für postgraduale Bildung [EIPOS] führten zu interaktiven Lehrveranstaltungen in Wirtschaftsmathematik, Unternehmensstatistik (Abb. 8):

- A. Erläuterung des Stoffes durch Lehrkräfte, verbunden mit softwaregestützten PC-Interaktionen der Studierenden mit den programmierten Lehrinhalten.
- B. Interaktive Stoffvertiefung des Studierenden am eigenen PC zum Erlernen schwieriger Stoffinhalte und mathematischer-statistischer Lösungswege, verbunden mit Konsultationen bei Lehrkräften zur Klärung der Lösung mathematischer-statistischer Aufgaben.
- C. Übergabe zusätzlicher Übungsaufgaben an die Studierenden zur eigenständigen Lösung.
- D. Klausurgestaltung entsprechend den Praxisbedingungen akademischer Arbeit<sup>15</sup>.

<sup>15</sup> Der Noten- und Punktspiegel liegt jedem Prüfling vor Beginn der Klausur vor, die Klausuraufgaben entnimmt er nachdem Zufallsprinzip aus einem Sammelbehälter; die Entnahme wird durch den Klausurleiter bestätigt.

**Europäisches Institut für postgraduale Bildung an der Technischen Universität Dresden e. V.**

Herr Prof. Dr. rer. oec. habil. Volker Oppitz lehrte „Wirtschaftsmathematik / Unternehmensstatistik“ für „Bachelor of Arts (BA) Unternehmensführung“ am Europäischen Institut für postgraduale Bildung an der Technischen Universität Dresden e. V. in Zusammenarbeit mit der Hochschule Zittau / Görlitz – University of Applied Sciences – wie folgt:

1. Matrikel (16. November 2006 bis 28. Februar 2009), sechzig Lehreinheiten [h],
2. Matrikel (17. Januar 2008 bis 28. Februar 2010), sechzig Lehreinheiten [h],
3. Matrikel (20. November 2008 bis 28. Februar 2011), sechzig Lehreinheiten [h],
4. Matrikel (19. November 2008 bis 28. Februar 2012), sechzig Lehreinheiten [h],
5. Matrikel (10. März 2011 bis 31. August 2013), sechzig Lehreinheiten [h].

Die interaktiv gestaltete Lehre in der Niveaustufe/Kategorie: Kategorie 1, Bachelor, wurde im Lerngebiet „Wirtschaftswissenschaften“ u. a. wie folgt ohne Auflagen akkreditiert:

**Prüfungsform:** Klausur. Lehrunterlagen, Internet-Abfragen usw. dürfen in Klausuren benutzt werden, wenn jede nach dem Zufallsprinzip gestellte Aufgabe unterschiedlich ausgestaltet ist.

**Lerninhalt:** Mathematisch-statistische Auffrischung, Zins-, Investitions- und Optimierungsrechnung, Debit- und Kreditfunktionen. Beschreibende und schließende Statistik, Regressionsanalyse. Durchgängige Anwendung eigener Mathematik- und Statistik-Software

**Lernergebnis:** 1. **Fachlich:** Erkennen mathematisch-statistischer Probleme des Tätigkeitsfeldes; Anwendung geeigneter Rechenprogramme für praxisgerechte Lösungen. 2. **Universell:** Einsicht in die Folgerichtigkeit von Mathematik und Statistik, in die Beweisfähigkeit von Entscheidungen und in die Bedeutung theoretischer Grundlagen für das Studium.“

Die Bestätigung der Erreichung der Ziele der interaktiv gestalteten Bachelor-Studiengänge auf dem Fachgebiet „Wirtschaftsmathematik / Unternehmensstatistik“ veranlasste das Präsidium des Europäischen Instituts für postgraduale Bildung der Technischen Universität Dresden, Herrn Professor Oppitz mit dem EIPOS Weiterbildungs-Lehrpreis 2011 auszuzeichnen und ihm im Zusammenhang mit seiner verdienstvollen wissenschaftlichen Tätigkeit im Jahre 2014 die Ehrenmitgliedschaft zu verleihen.

Dresden, dem 12.03.2015

**Dr. Ing. Werner Mankel**  
Präsident des EIPOS e. V.

*Abbildung 8: Akkreditierungsbeleg im Bachelorstudium*

Die vernetzte *multiaktive* Stoffdarbietung<sup>16</sup>: Vorlesung (Didaktik), Seminar (Didaktik, Mathematik) und PC-Aufgaben (Mathematik) verdichtet die Leistungsanspruchnahme der Studierenden: Sie stehen in Interaktion mit Lernsoftware, befragen Lehrkräfte zur Problemklärung oder lösen Aufgaben. Ein Prüfungstest lieferte exponentialverteilte Noten (Abb. 9): 1 = 45,00 %, 2 = 21,75 %, 3 = 15,00 %, 4 = 11,50 %, 5 = 6,75 % [NCH]. Dabei ist i. Allg. davon auszugehen, dass ein über die

<sup>16</sup> Bedienungstheoretisch geschlossene Lehr- und Lerneinheiten (vgl. Oppitz 2011/1, S. 389 ff)

Noten  $x_i$  ( $i = 1 \dots n$ ) verteiltes Lernvermögen:  $F(n) = 1$ , verfügbar ist (Parameterwerte: Dichtefaktor  $y_1 = 107,73$  %, Exponent  $\lambda = 0,49898$ ,  $\sigma = 3,05253$ ):

$$F(x) = y_1 \cdot (1 - e^{-\lambda x}), \quad x \in [1, n] \rightarrow F'(x) = f(x) = y_1 \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x},$$

$$y_1 \cdot (1 - e^{-\lambda n}) = 1, \quad [\lambda, y_1] \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^n (F(x_i) - y_i)^2} \rightarrow \text{Min!}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-2} \cdot \sum_{i=1}^n (F(x_i) - y_i)^2}.$$

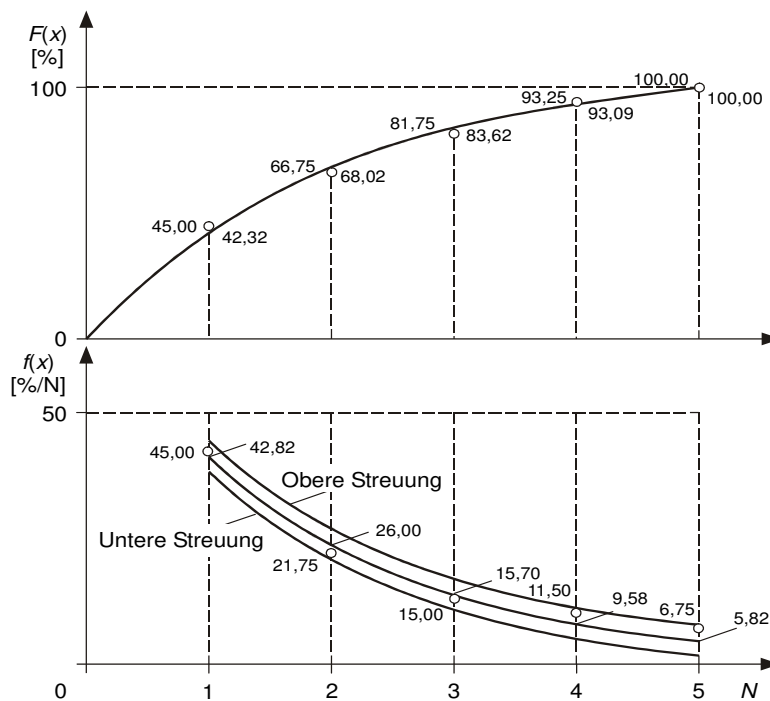


Abbildung 9: Testdaten und Kurven der exponentiellen Dichte- und Verteilungsfunktion

Die Notenverteilung bei Klausuren zeigt keine Mittigkeit. Neben der computergestützten Vermittlung des Lehrstoffs, der Computerbefähigung der Lehrkräfte und Studierenden bewirkt besonders die inhaltliche und methodische Verflechtung von Didaktik und Mathematik die gataische Dichteverteilung der Noten [NCE, NCK]. Im Vergleich zur exponentiellen Dichtefunktion verringert sich die Häufigkeit der Note 1 zugunsten der Note 5 (Abb. 10):

$$f(x) = h_0 \cdot \ln(1 + x^\alpha) + h_1 \cdot x^{-\kappa}, \quad x \in [1, n],$$

$$[h_0, h_1, \alpha, \kappa] \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2} \rightarrow \text{Min!} \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{n-4} \cdot \sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2},$$

$$F(x) = f(1) + \int_1^x f(x) \cdot dx, \quad [\mu] \equiv f(1) + \int_1^\mu f(x) \cdot dx = \frac{1}{2}$$

Parameterwerte: Exponenten  $\alpha = 2,00217$ ,  $\kappa = 1,73134$ , Faktoren  $h_0 = 4,78$ ,  $h_1 = 30,46$ , Standardabweichung  $\sigma = 0,41360$  [%/N], Mittel  $\mu = 1,79048$  (Note nahe 2).

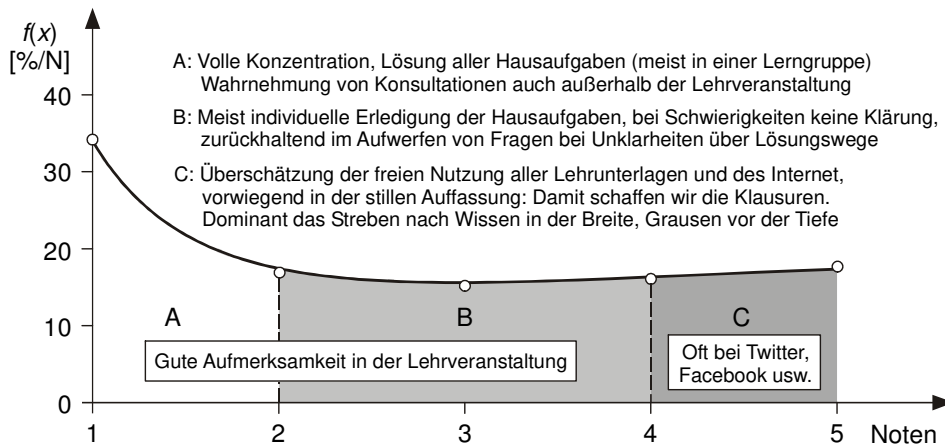


Abbildung 10: Gataische Notenkurve in Wirtschaftsmathematik, Unternehmensstatistik

Die tiefgreifenden Veränderungen der Validität der Modellierung mit einer Verlagerung der Notenverteilung von der Mitte auf die Ränder des Definitionsbereiches ist durch folgende Gründe gewährleistet: Die

- Objektivität der Leistungsanforderung ist durch die Eigenheit der Klausuraufgaben gewährleistet: Ausschluss des Abschreibens durch Einmaligkeit der personalen Klausuraufgaben, Inanspruchnahme aller stofflichen und medial öffentlich zugänglichen Hilfsmittel wie in der Berufspraxis, Zufälligkeit der Zuordnung der Klausuraufgaben.
- Lösungswege und Ergebnisse haben weder einen Ermessens- noch Beurteilungsspielraum.
- Güte und sorgfältige Messung der Klausurleistung sind gewährleistet, ebenso die Gültigkeit und Zuverlässigkeit der Bewertung: Jede folgende Lösung stimmt mit jedem vorgehenden Ergebnis unwiderruflich überein. Abschreiben ist unmöglich, weil jede Klausuraufgabe bei gleichwertiger Leistungsanforderung einmalig ist.

Die Klausurergebnisse legen es nahe, dass bestimmenden Einfluss auf das Leistungsvermögen der Studierenden die auf MINT beruhende didaktische und mathematische Leistungsdichte ausübt; denn in der Summe der Notenverteilung der Bachelor-Studiengänge ist kaum anzunehmen, dass es sich um Zufälle handelt. Zu „Industrie 4.0“ gehört vor allem bei MINT-Fächern ein Bildungsprofil 4.0 dort, wo zum einen die Wissensversorgung durch hochmoderne Software schnellste Geschwindigkeit sowie umfassende Speicherzugriffe erlaubt und zum anderen eine miniaturisierte Hardware verfügbar ist, die jeder Orts benutzt werden kann.

### *Beteiligungsfunktionen*

#### *Grundlagen*

In der Wirtschaftslehre beschreiben mathematische Funktionen tatsächliche oder vermutete Mengen-Zusammenhänge wirtschaftlicher Ereignisse. „Menge“ verdeutlicht durch eine mathematische Funktion, Tabelle oder ein Bild dargestellte quantitative Beziehungen, in dem die Elemente einer Menge denjenigen anderer Mengen als zwei-  $y = f(x)$  oder mehrdimensionale Funktion:  $y = f(x_n)$ , mit einer abhängigen  $y$  und mit unabhängigen Variablen  $x_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) zugewiesen werden. Die Menge der zulässigen Werte ist für die unabhängigen Variablen der Definitionsbereich  $[D_f]$  der Funktion, für die abhängigen Variablen  $y$  der Wertebereich. Jedem Wert einer Menge unabhängiger Variablen entspricht genau ein Wert der Menge der abhängigen Variablen. Ihre Funktion bezeichnet algorithmische Abbildungen von der Menge  $A$  in die Menge  $B$  als eine Menge  $f$  mit folgenden Eigenschaften:

- $f$  ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts:  $A \times B$ , der Paare  $a, b$  mit  $a$  in  $A$  und  $b$  in  $B$ ;
- jedes Element  $a$  von  $A$  besitzt genau ein Element:  $f(a) = b$ , also von  $B$ , woraus folgt, dass das Paar  $a, b$  ein Element von  $f$  ist.

Der  $D_f$  wird durch die Zahlenreihen bestimmt und ist fast immer endlich: Der Erkenntnisraum, in dem sich die Zahlen bewegen, ist meist im Text beschrieben. I. Allg. ist dann eine zusätzliche abstrakte mathematische Beschreibung<sup>17</sup> nicht erforderlich, wie z.B. der Art:

Element der Menge:  $(x_i \in M)$ , kein Element der Menge:  $(x_i \notin M)$ .

Eindeutige zweidimensionale:  $y = f(x)$ , oder dreidimensionale:  $y = f(x_1, x_2)$ , Funktionen können durch Kurven veranschaulicht werden. Sie verknüpfen die Werte im  $D_f$  der unabhängigen mit den Größen im Wertebereich der abhängigen Variablen. I.d.R. stehen die Werte der unabhängigen Variablen auf liegenden (Abszissen), die der abhängigen auf senkrechten Skalen (Ordinaten). Kurven der Stamm-  $f(x)$ , Ableitungs-  $f'(x)$ , Integralfunktion  $F(x)$  usw. dienen der Untersuchung ihrer Ausprägungen, wie z.B. diskret, stetig, Null-, Pol-, Rand-, Extremstellen, unter Angabe der Ergebnisse der Kurvendiskussion; sie eignen sich für quantitative Analysen und theoretische

---

<sup>17</sup> Bei von Dritten weiter zu verarbeitenden Beteiligungsfunktionen (Programmierung) sind Kodierungen erforderlich.

sche Auswertungen. Die Stammfunktion  $f(t)$  beschreibt z.B. die Aufwandsverteilung einer Losfertigung (Prozesskontinuität), ihre Integration  $F(t)$  die Aufwandskumulation, ihre 1. Ableitung  $f'(t)$  die periodische Aufwandsaufteilung an der Stelle  $x_0$  drückt ihre Fertigungsdichte aus (Abb. 11):

$$f'(x_0) \quad \text{oder} \quad \frac{df}{dx}(x_0),$$

weil der folgende Grenzwert existiert und die Funktion an der Stelle  $x = x_0$  differenzierbar ist:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

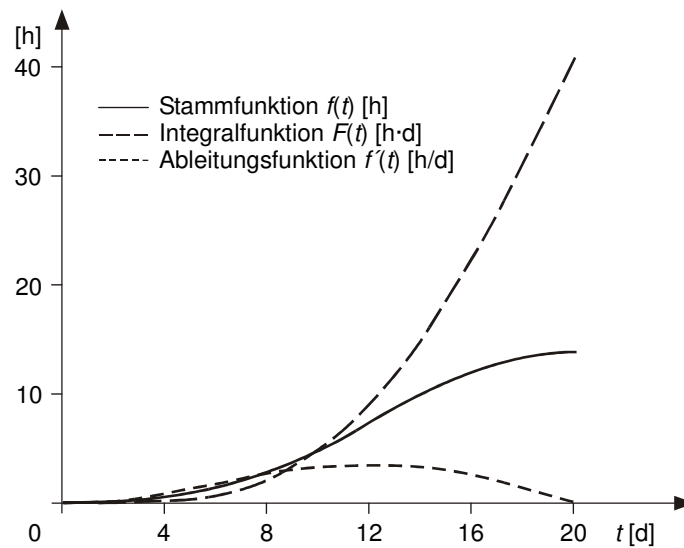


Abbildung 11: Stamm-, Integral- und Ableitungsfunktion

Den Kurvenanstieg vermittelt der Tangens des Neigungswinkels  $f(x)$ , die Sekanten schneiden in der Umgebung<sup>18</sup> der Stelle  $x_0$  die Funktionskurve an zwei Kurvenpunkten (Abb. 12). Qualitativ bestehen Differentiationsregeln für alle an der definierten Stützstelle ableitbaren Funktionen inkl. für jede daraus zusammengesetzte differenzierbare Funktion.

<sup>18</sup> Strebt die unabhängige Veränderliche  $x$  gegen  $x_0$ , dann entsteht aus der Sekante eine Tangente.



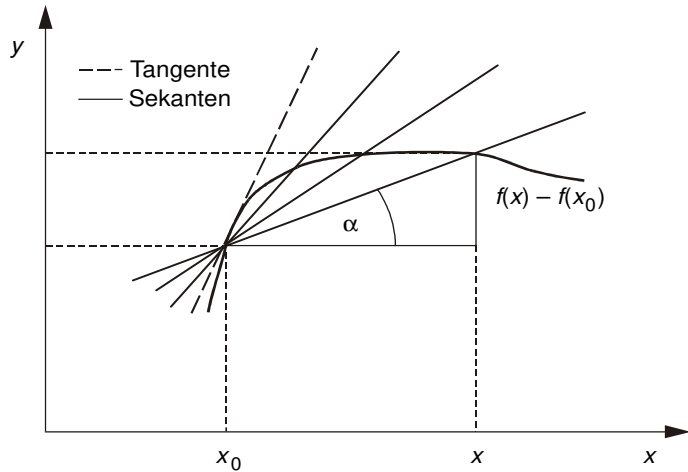


Abbildung 12: Tangente und Sekanten an der Stelle  $x_0$

Die Integration der nichtnegativen stetigen Stammfunktion  $y = f(x)$  im Intervall  $[x_a, x_e]$  dient der Flächenbestimmung unter der Funktionskurve. Bei dessen beliebiger Zerlegung:

$$x_0 = x_a < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = x_e,$$

kann das Integral als Grenzwert der Summe von Rechteckflächen gewonnen werden, die zu den Teilintervallen gehören (Abb. 13), wenn die Zerlegung immer feiner und feiner wird:

$$F(x) = \int_{x_a}^{x_e} f(x) \cdot dx = \lim_{\delta \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot f(x_i), \quad x_i - x_{i-1} \leq \delta, 0$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

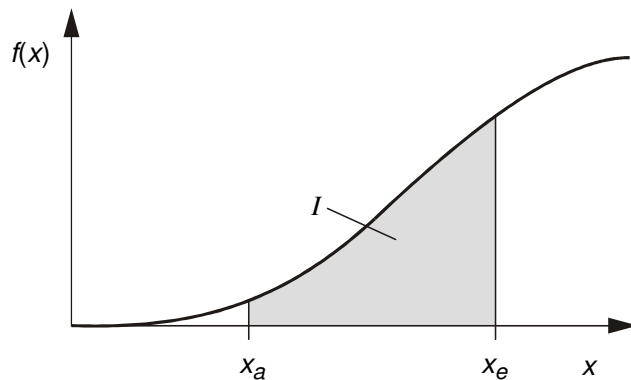


Abbildung 13: Integralfläche unter einer Kurve

Die Formen der Anwendung mathematischer Algorithmen der quantitativen Analyse setzen voraus, dass ihre Beziehungen durch logische

Zusammenhänge verknüpft sind. Dabei ist zu unterscheiden, ob (determinierte) Bestimmungsgrößen oder (probabilistische) Zufallsgrößen die Ereignisse beschreiben:

- *Beteiligungsfunktionen* verallgemeinern Bestimmungsgrößen in ihrer Grundrichtung und Streuung; ihre Einteilung in Funktionsklassen erleichtert den Gebrauch und hilft, die gewonnenen wirtschaftsanalytischen Ergebnisse genauer und aufschlussreicher zu bewerten.
- *Wahrscheinlichkeitsfunktionen* behandeln ZSP einer Grundgesamtheit an Zufallsgrößen, deren Eigenschaften ihre Auswahl weitgehend bestimmen<sup>19</sup>.

Im Folgenden geht es um die Analyse empirischer Verteilungen von Bestimmungsgrößen und deren Auswertung durch Approximation passender Beteiligungsfunktionen.

### Verteilungen im Wirtschaftsleben

Der Begriff der *Verteilung* lässt sich vom Gebrauch dieses Wortes in der Kaufmannssprache, im unternehmerischen Alltag ableiten, wie z.B.: Das Anlagevermögen des Unternehmens verteilt sich auf Kostenstellen, die Bezahlung einer Ware findet ratenweise in mehreren Perioden statt, die Fördermittel weist die Regierung in Gründung befindlichen Unternehmen zu.

Die Verteilung geschieht *gleichmäßig*: Mahlgut wird in gleichgewichtige Verpackungen abgefüllt, die periodische Tilgung von Krediten erfolgt mit gleichbleibenden Annuitäten usw. oder *linksteil, mittig oder rechtssteil* (Abb. 14), wie z.B.: Die Stimmrechte einer GmbH werden durch verschiedene Stammeinlagen bestimmt, der Arbeitsaufwand für die Herstellung der Serienprodukte entfällt mit unterschiedlicher Häufigkeit auf Produktionsperioden.

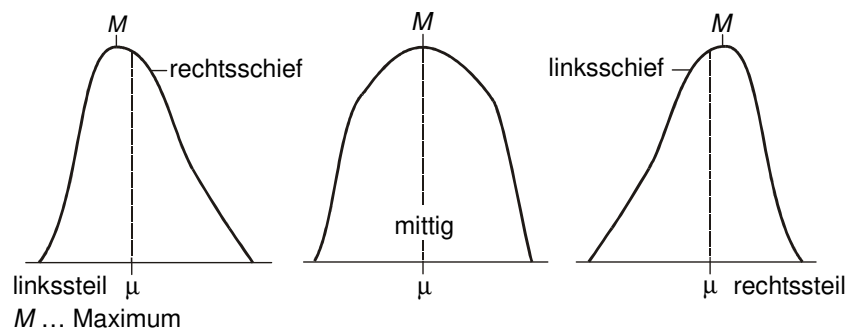


Abbildung 14: Schiefe bzw. Steilheit der Kurven einer Verteilung

Was kennzeichnet eine Verteilung? Es wird eine teilbare Quantität wie folgt verteilt:

<sup>19</sup> Ihre wirtschaftsmathematische Anwendung und die Bestimmung der Größe einer ZSP behandelt eine gesonderte Schrift.

- diskret auf endlich viele Elemente oder auf abzählbar unendlich viele Elemente: Eine diskrete Menge heißt abzählbar, wenn jedes Element mit einer Nummer 1, 2, 3, 4, ... versehen werden kann, so dass keine Nummer zweimal vorkommt oder fehlt; sie heißt endlich bei bekannter Anzahl  $n$  oder unendlich:  $n \rightarrow \infty$ !
- stetig auf das Zusammenhängende (Kontinuum), eine Strecke, Fläche, einen Raum usw.

Mathematisch ausgedrückt: Eine positive Größe<sup>20</sup>  $M$  stellt eine Verteilung auf die Menge  $A$  (den Verteilungsbereich) dar, wenn jeder Teilmenge:  $A' \leq A$ , durch eine Funktion  $Q$  ein absoluter Anteil  $Q(A') \cdot M$  zugeordnet ist, wobei folgende *Bedingungen* erfüllt sind:

1. Es ist stets:  $0 \leq Q(A') \leq 1$ , Menge  $A$ :  $Q(A) = 1$ , leere Menge:  $Q(\emptyset) = 0$ .
2. Sind die Teilmengen  $A'$  und  $A''$  elementfremd<sup>21</sup>, so gilt:  
 $Q(A' \cup A'') = Q(A') + Q(A'')$ .

Die Vorschrift über ihre Ausprägung heißt Beteiligungsfunktion  $Q$ . Realisiert wird jeweils ein Skalar mit Angabe der Art seines Auftretens als experimentelle quantitative Beschreibung einer Menge; ihre Eigenschaften können erläutert und grafisch dargestellt werden. I. Allg. gilt: Die Funktion  $F_X(x)$  einer Verteilung hat folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned} 0 &\leq F_X(x) \leq 1 \quad \text{für alle reellen Werte } x, \\ F_X(x_1) &\leq F_X(x_2) \quad \text{für } x_1 < x_2, \text{ d. h. } F_X \text{ ist monoton wachsend,} \\ F_X(\xi) &\rightarrow F_X(x) \quad \text{für } \xi \downarrow x, \text{ d. h. } F_X \text{ ist von rechts stetig,} \\ \lim_{x \rightarrow a} F_X(x) &= 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow b} F_X(x) = 1, \quad -\infty \leq a < b \leq +\infty. \end{aligned}$$

Bei einer stetig verteilten Variablen  $X$  wird davon ausgegangen, dass sich die Funktion  $F_X$  durch eine Maximumfunktion  $f_X$  mit folgenden Eigenschaften darstellen lässt:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) \cdot dt, \quad f(x) \geq 0 \quad \text{für alle reellen Werte } x,$$

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = 1,$$

$$\frac{dF_X(x)}{dx} = f_X(x) \quad \text{für alle reellen Werte } x,$$

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x) \cdot dx \quad \text{für alle reellen Werte } a, b \text{ mit } a < b.$$

*Empirisch verteilte* Mengen sind endlich oder abzählbar unendlich. Die Elemente ihres Verteilungsbereichs  $x_1, x_2, x_3, \dots$  und die auf sie entfallenden absoluten Anteile

<sup>20</sup> Parameter mit einer Wertangabe als Produkt aus Maßzahl und Maßeinheit im physikalischen Sinne.

<sup>21</sup> Disjunkt oder durchschnittsfremd, da sie kein gemeinsames Element besitzen.

le  $m_1, m_2, m_3, \dots$  der verteilten Größe  $M$  können wie die Glieder einer Folge aufgezählt werden. Die absoluten Anteile  $m_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) sind durch die relativen Anteile  $q_i = m_i/M$  ersetzbar, wenn ihnen die Summe  $M$  hinzugefügt wird. Im Sinne des Verteilungsbegriffes verkörpert der Parameter  $q_i$  den Wert der Funktion für die aus dem Element  $x_i$  allein gebildete Teilmenge  $\{x_i\}$  von  $A$ :  $q_i = Q(\{x_i\})$ . Aus den vorstehenden Bedingungen 1., 2. ergeben sich die Zuweisungen:

$$0 \leq q_i \leq 1 \quad \text{für alle Nummern } i \text{ und} \\ q_1 + q_2 + q_3 + \dots = Q(\{x_1\}) + Q(\{x_2\}) + Q(\{x_3\}) + \dots = Q(A) = 1 \equiv 100 \%$$

Eine besondere Rolle kommt den Häufigkeitsverteilungen zu: Die Anzahl  $n$  diskreter Größen  $a_1, \dots, a_n$  ( $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ ) heißt absolute Häufigkeit  $H_n(a_j)$  mit  $a_j, j = 1, 2, \dots, n$ :

$$\sum_{i=1}^j H_n(a_i) = H_n(a_1) + \dots + H_n(a_j).$$

Ihr Verhältnis zur Anzahl  $n$  diskreter Größen heißt relative Häufigkeit (Tab. 1):

$$h_n(a_j) = \frac{1}{n} \cdot H_n(a_j), \quad \text{wobei gilt: } 0 \leq h_n(a_j) \leq 1, \quad \sum_{j=1}^k h_n(a_j) = 1.$$

Merkmalsausprägung $a_j$	Absolute Häufigkeit $H_n(a_j)$	Relative Häufigkeit $h_n(a_j)$
$a_1$	$H_n(a_1)$	$h_n(a_1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$a_n$	$H_n(a_k)$	$h_n(a_k)$

*Tabelle 1: Häufigkeitstabelle diskreter Bestimmungsgrößen*

### *Bestimmungsgrößen und Beteiligungsfunktionen*

Die mathematische Verallgemeinerung der Bestimmungsgrößen mit (Gradations-) Beteiligungsfunktionen wirft Fragen nach ihrem Zusammenhang, nach Gesetzmäßigkeiten ihrer Verteilung auf, wie z.B.: Unterliegt ihr Auftreten mathematisch umsetzbaren Regeln? Ist ihr meist eindimensionaler  $D_f^{22}$  und Wertebereich halbseitig und endliche (Abb. 15)? Oder ist ihr  $D_f$  beidseitig bzw. links oder rechts endlich oder unendliche (Abb. 16)?

<sup>22</sup> Eine Punktmenge, ein Intervall  $\{a, b\}$  der Zahlengeraden

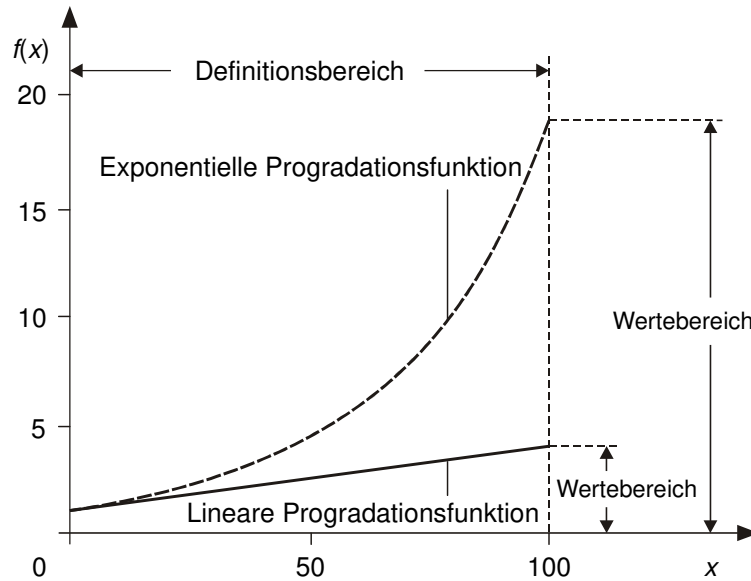


Abbildung 15: Halbseitiger Definitions- und Wertebereich einer Beteiligungsfunktion

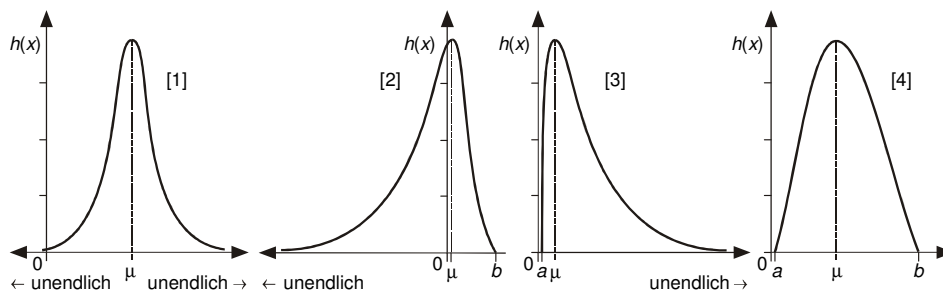


Abbildung 16:  $D_f$  und Ausprägungen einer Maximumfunktion

$$F(X) = Q(A'),$$

$$0 \leq F(x) \leq 1 \begin{cases} F(-\infty) = 0, & F(+\infty) = 1, & D_f \text{ unendlich} \\ F(-\infty) = 0, & F(< \infty) = 1, & D_f \text{ links unendlich} \\ F(< \infty) = 0, & F(+\infty) = 1, & D_f \text{ rechts unendlich} \\ F(> -\infty) = 0, & F(< \infty) = 1, & D_f \text{ endlich} \end{cases}$$

Eine Zahlenreihe wird durch die Angabe von Elementen des Verteilungsbereichs, eine Beteiligungsfunktion  $f$  in  $\{a, b\}$  durch jedes beliebige Teilintervall  $\{x_1, x_2\}$  be-

stimmt<sup>23</sup> (Abb. 17), d.h. durch die Fläche zwischen Abszisse, Funktionskurve und Ordinaten<sup>24</sup>  $f(x_1), f(x_2)$ :

$$Q(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) \cdot dx, \quad f(x) \geq 0, \quad Q(a, b) = \int_a^b f(x) \cdot dx = 1.$$

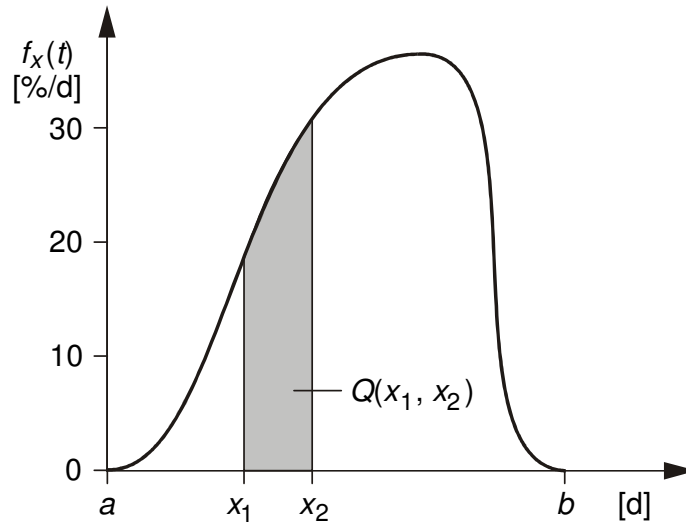


Abbildung 17: Grenzkurve der Sinuspotenz-Gipfelfunktion

Die Regressionsanalyse zum Ersatz der Zahlenreihe durch eine Beteiligungsfunktion:  $y = f(x)$ , erfolgt i.d.R. mit der Methode der kleinsten Quadrate. Ist die unabhängige Variable  $x$  eine beliebige reelle Zahl und  $A'$  die Menge aller links von  $b$  liegenden eindimensional verteilten Werte des Verteilungsbereichs  $A$ , so ordnet die Funktion  $F$  der reellen Zahl  $x$  den Wert  $Q(A')$  zu. Auf der Menge der Bestimmungsgrößen ist eine Beteiligungsfunktion mit  $D_f$  und Wertebereich gegeben: Jedes Element ist eine Funktionalisierung der Bestimmungsgrößen mit der Standardabweichung, den positiven und negativen Abweichungen um die Funktionswerte.

Oft soll eine Zahlenreihe feiner aufgeschlüsselt werden, wie z.B. die Monatskosten  $q_t$  über dem  $D_f x_t$ ,  $t = 0, 1, \dots, 5$  (Abb. 18, Tab. 2), weil die Fertigungsleitung nach Wochen plant.

<sup>23</sup> Auf den ausführlichen mathematischen Beweis wird hier verzichtet.

<sup>24</sup> Die Ordinaten, die durch die Funktionskurve den Abszissenpunkten zugeordnet werden, haben nicht die Bedeutung von Quanten. „Quant“ bezeichnet einen unendlich kleinen Teil einer Bestimmungsgröße. Es könnte so ausgedrückt werden: Je größer die Ordinate an einem bestimmten Punkt, desto höher werden in diesem Augenblick die anfallenden Anteile.

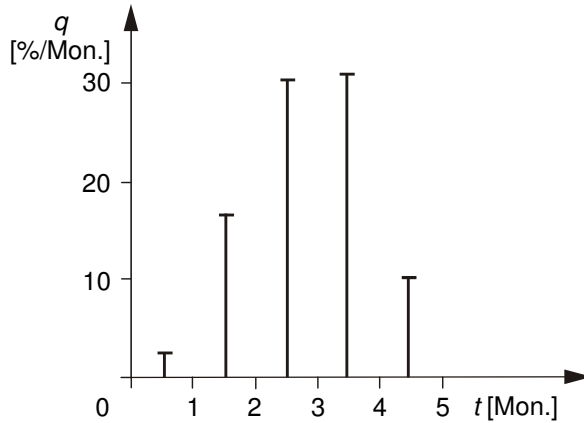


Abbildung 18: Nadeldiagramm der Kosten für ein Fertigungslos über der Durchlaufzeit

$x_i$	$m_i$ [€]	$Q_i = \Sigma m_i$	$x_i$	$q_i = m_i/M$	Approximiert
1	6100,00	3,13	0,5	3,13	2,845
2	41000,00	21,05	1,5	17,92	18,324
3	104500,00	53,64	2,5	32,59	32,937
4	168000,00	86,24	3,5	32,60	32,395
5	$M =$	100,00	4,5	13,76	13,499

Tabelle 2: Kumulative und Monatskosten der Fertigung eines Los an Werkzeugmaschinen

Die Sinuspotenzdichtefunktion (Oppitz 1961, S.126/130) gleicht die Monatskosten aus (Abb. 19):  $f(t) = y'(x)$ , die Fertigungsplanung erhält die Wochenkosten (Tab. 3):

$$z = \frac{\pi}{2 \cdot x_S}, \quad y'(x) = \frac{\alpha \cdot y_S \cdot z \cdot \cos(x \cdot z)}{\sin^{1-\alpha}(x \cdot z)}, \quad x \in [0, x_S], \quad \text{VTA}$$

$$[\alpha] \equiv \sum_{i=1}^n (y_i - y'(x_i))^2 \rightarrow \text{Min!} \quad \alpha > 1, \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - y'(x_i))^2},$$

$$x_M = \frac{2 \cdot x_S}{\pi} \cdot \arctan \sqrt{\alpha - 1}, \quad y(x) = y_S \cdot \sin^{\alpha}(x \cdot z).$$

$x_i$	$q_i$ [€/W]	$x_i$	$q_i$ [€/W]	$x_i$	$q_i$ [€/W]	$x_i$	$q_i$ [€/W]
1	1624,63	6	37035,22	11	69912,93	16	50264,08
2	5749,67	7	45932,06	12	70938,96	17	39556,62
3	11847,16	8	54156,37	13	69475,62	18	27282,93
4	19440,42	9	61189,04	14	65472,89	19	13920,48
5	28017,98	10	66568,50	15	59004,43	20	0,00

Tabelle 3: Funktionelle Kostenplanung nach Wochen  $x_i$  für ein Fertigungslos

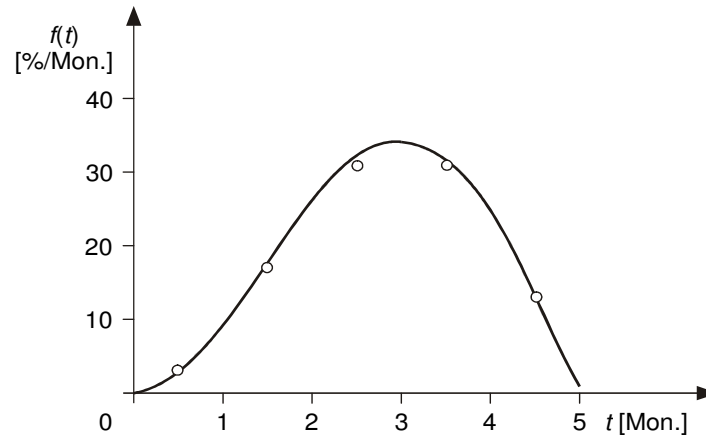


Abbildung 19: Funktionskurve der Fertigungskosten über der Durchlaufzeit

Obwohl Parameter und Kenngrößen (Tab. 4) erklärtermaßen zu einer Verteilung gehören, stimmen nicht immer die empirischen und funktionellen Momente überein.

Parameter	Beschreibung	Bemerkungen
Ausreißer	Unzuerwartende Größe	Außerhalb einer Annahmegrenze
Durchschnitt	Erwartungswert	Halbsumme der Dichte bzw. Häufigkeiten
Median	Mitte eines Definitionsbereichs	Senkrechter Strich auf der Abszisse
Modus	Gipfelwert	Maximum der Dichte bzw. Häufigkeit
Quantil, oberes	Rechtsseitige Stützstelle	Bezogen auf Vertrauensintervalle von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
Quantil, unteres	Linksseitige Stützstelle	
Quantilweite	Oberes abzgl. unterem Quantil	Kennzeichnet den Annahmehereich
Rand, oben	Rechtsseitige Grenze der Zahlenreihe	Anfang und Ende des Definitionsbereichs
Rand, unten	Linksseitige Grenze der Zahlenreihe	
Spannweite	Oberer abzgl. unterer Rand	Abszissenlänge des Definitionsbereichs
Standardabweichung	Streuungsmaß des Durchschnitts	Wurzel der Quadratsumme der Wertabweichungen von ihrem Durchschnitt
Streuweite	Höchstwertabstand vom Durchschnitt	Maximum eines Randes zum Durchschnitt

Tabelle 4: Auswahl statistischer Parameter einer theoretischen Verteilung



Wichtige Kennzahlen für die Bestimmung empirischer und theoretischer Verteilungen sind:

- **Arithmetisches Mittel:**

$$\text{unterschiedliche Häufigkeit: } \mu = \frac{x_1 \cdot h_1 + x_2 \cdot h_2 + \dots + x_n \cdot h_n}{h_1 + h_2 + \dots + h_n},$$

$$\text{gleiche Häufigkeit: } \sum_{i=1}^n h_i = n, \quad \mu = \frac{1}{n} \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_n).$$

- **Datenhalbstelle  $h_s$ :** mittlere Stelle der Zahlenreihe:

$$h_s = \frac{n+1}{2}.$$

- **Datenmitte (Zentralwert, Median):** hälftiger (theoretischer) Merkmalswert, errechnet bei

$$\text{gerader Anzahl } n \text{ als Mittel der mittleren Merkmalswerte: } \tilde{x} = \frac{1}{2} \cdot \left[ x_{\frac{n}{2}} + x_{1+\frac{n}{2}} \right],$$

$$\text{ungerader Anzahl } n \text{ als mittlerer Merkmalswert: } \tilde{x} = x_{\frac{n+1}{2}}.$$

- **Häufigkeit  $h_i$ :** Datenanzahl  $i$  [St.], Datenanteil  $h_i$  [%]:

$$N = \sum_{i=1}^n h_i.$$

- **Modus  $h_M$ :** häufigster Wert:

$$h_M = \text{Max}_{1 \leq i \leq n} [h_i], \text{ wenn } \sum_{i=1}^n h_i > n.$$

- **Schiefe (Asymmetrie) und Mittigkeit (Symmetrie) der Verteilung:**

$$s_c = \mu - x_M \quad \begin{cases} s_c > 0 \rightarrow \text{linkssteil bzw. rechtsschief} \\ s_c < 0 \rightarrow \text{rechtssteil bzw. linksschief} \end{cases} \quad s_c = 0 \rightarrow \text{gerade.}$$

- **Spannweite:** größter  $x_g$  abzgl. kleinsten  $x_k$  Wert  $R$  bzw. in Relation  $R_r$  zum Mittel:

$$R = x_g - x_k \leftarrow \begin{cases} x_k = \text{Min}_i [x_i] \\ x_g = \text{Max}_i [x_i] \end{cases} \quad R_r = \frac{R}{\mu}.$$

- **Streuweite:** größter  $K$  bzw. relativer  $K_r$  Abstand eines Randwertes zum Mittel:

$$K = \text{Max}_{x_g, x_k} \left[ \begin{array}{l} |\mu - x_g| \\ |\mu - x_k| \end{array} \right], \quad K_r = \frac{2 \cdot K}{\mu}.$$

- **Variationskoeffizient  $v$ ,** Standardabweichung durch arithmetisches Mittel:

$$v = \frac{\sigma}{\mu}.$$

- **Varianz  $\sigma^2$ :** Quadratsumme der Abweichungen vom Mittel, und Standardabweichung  $\sigma$ :

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n h_i^* (x_i - \mu)^2, \quad \sigma = \left| \sqrt{\sigma^2} \right|.$$

Die Abbildung wirtschaftlicher Interaktionen mit *Beteiligungsfunktionen* dient analytischen Zwecken der Gestaltung wirtschaftlicher Prozesse, erlaubt die wirtschafts-

didaktische Erklärung der Verteilung der Bestimmungsgrößen und verbessert die Entscheidungsfindung.

### *Klassen der Beteiligungsfunktionen*

Das Finden der passenden Beteiligungsfunktion erfordert gründliches Wissen. Deuten z.B. Produktkosten auf eine arithmetische Reihe hin, ist nicht gleich eine lineare Funktion anzuwenden, weil Kosten hyperbolisch mit der Menge abnehmen können, bewirkt durch Lernen und Rationalisieren. Auf Grund einer Ursachen- und Wirkungsanalyse ist eine auf die Interaktion zutreffende Funktion aus der wirtschaftswissenschaftlichen Literatur auszuwählen oder z.B. aus einer DGL zu entwickeln. Es genügt nicht, irgendeinen mathematischen Algorithmus zu verwenden. Bei der Wahl der Beteiligungsfunktion ist die Streuung eine Hilfe zweiten Grades. Käme es darauf an, diejenige mit der kleinsten Streuung  $\sigma$  zu finden, wäre lediglich eine lineare, geometrische, Langrangesche oder Spline-Interpolationsfunktion (vgl. Opitz, 2011/2, S.240/243) anzuwenden:  $\sigma = 0!$  Diese Übereinstimmung funktioneller und empirischer Werte erlaubt keine wirtschaftsdidaktische Verallgemeinerung, sondern bedeutet:

1. Kein Trend, der grundsätzliche Verlauf der Interaktion ist nicht feststellbar, der mathematische Ausdruck beschreibt nicht das Interaktionsverhalten, das bleibt verborgen!
2. Keine Abweichungen, deren Analyse wichtige Erkenntnisse über die Qualität der Prozessführung, aufgetretene Störungen und deren Ursachen ermöglicht.

Die Beteiligungsfunktionen werden nach ihrer Verlaufsform in Klassen eingeteilt (Abb. 20).

*Bigradationsfunktionen:* Mit zunehmenden Werten der unabhängigen Variablen steigen die Werte der abhängigen Variablen der

- *Proreprogradationsfunktionen* bis zu einem Wendepunkt progradativ und danach regradativ an, wie z.B. Bestandsaufbau von Haushaltgeräten, Betriebsmitteln;
- *Reprogradationsfunktionen* bis zu einem Wendepunkt regradativ und danach Progradativ an, wie z.B. Kosten für die Nutzwertentwicklung von Produkten.

*Degradationsfunktionen:* Mit Zunahme der Werte der unabhängigen Variablen fallen die der abhängigen Variablen ab, wie z.B. Fertigungskosten in Folge technologischer Verbesserungen; dieser Verlauf besitzt keinen deflatorischen Charakter<sup>25</sup>.

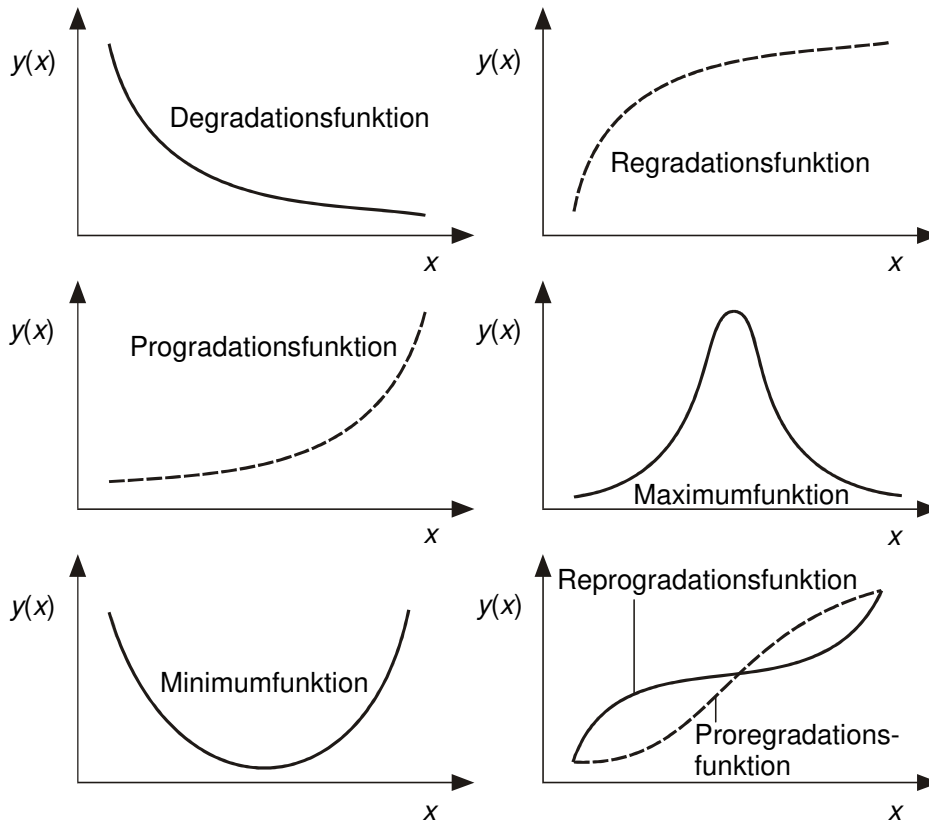
*Maximumfunktionen:* Die abhängige Variable besitzt ein Maximum; ihre Werte steigen proportional zu den unabhängigen Variablenwerten von links bis zu einem Maximum an und fallen danach wieder ab, wie z.B. der Gewinn in der Marktperiode eines Produkts.

*Minimumfunktionen:* Die abhängige Variable besitzt ein Minimum; ihre Werte fallen proportional zu denen der unabhängigen Variablen von links bis zu einem Mini-

---

<sup>25</sup> „Aber wenn nun die Preise fallen“... „dann ist plötzlich der Absatz wie totgeschlagen. Kein Mensch kauft mehr etwas, weil er denkt, dass es noch billiger wird. Das ist doch ungesund.“ (Schmalenbach, S.482).

mum ab und steigen danach wieder an, wie z.B. die Kosten der Fertigung und Lagerhaltung; als Spezialfall können sich abflachende Gipfel zu einer sogenannten (Wannen-) gataischen Funktion ausbilden, wie z.B. bei organischen (Schwangerschaftsabbrüche und Todesfälle am Lebensanfang und -ende) oder stofflichen Verschleißprozessen (Frühausfälle am Anfang und Abnutzungsausfälle zum Ende der Nutzungsdauer von Produkten).



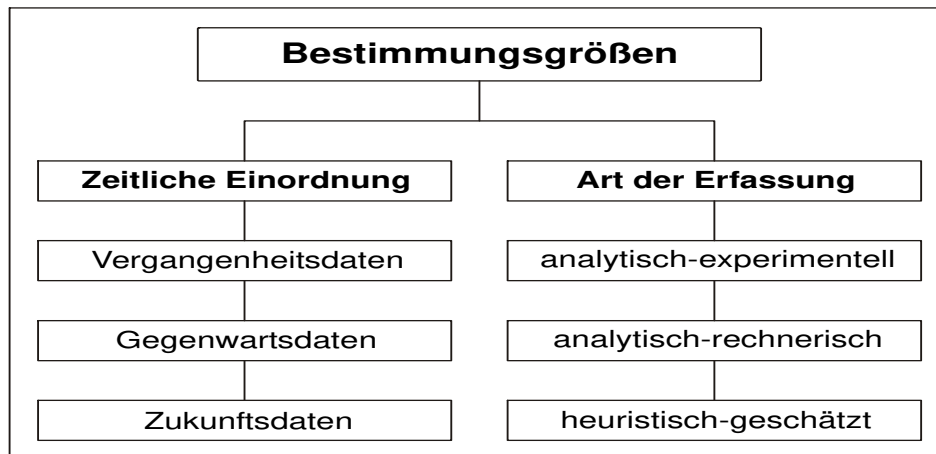
*Abbildung 20: Beteiligungsfunktionen*

*Progradationsfunktionen* verkörpern steigende Werte der abhängigen Variablen, je weiter sich die unabhängige Variable nach rechts gegen unendlich bewegt, wie z.B. das organische Produktivitätswachstum der Unternehmen.

*Regradationsfunktionen:* Die Wertsteigerung der abhängigen Variablen wird zunehmend geringer, je weiter sich die unabhängige Variable nach rechts gegen unendlich bewegt, wie z.B. die Nachfrage bei wachsenden Produktpreisen.

Die Einordnung der Beteiligungsfunktionen erfordert die Aufbereitung mathematisch verwertbarer Kenngrößen über Verteilungen empirischer Bestimmungsgrößen (Abb. 21) aus sorgfältiger Nachbereitung abgelaufener und Vorkalkulation künftiger Interaktionen.

Nach der Aufbereitung einer Zahlenreihe ist es möglich, durch computergestützte Näherungsrechnung (z.B. Regressionsanalyse) die Werte der Parameter einer Beteiligungsfunktion zu ermitteln. Maßstab ihrer Tauglichkeit ist der wirtschaftswissenschaftliche Bezug auf die untersuchte Interaktion und die begründete Abbildung der Bestimmungsgrößen.



*Abbildung 21: Strukturmerkmale wirtschaftlicher Bestimmungsgrößen*

#### *Analytisch-prognostische Beteiligungsfunktionen*

Prognostische Erscheinungsformen der Bestimmungsgrößen treten z.B. bei der Planung auf, oft gewonnen durch Trendextrapolation der Beteiligungsfunktion. Der analytische Befund der bisherigen Entwicklung beruht auf den mathematisch formalisierten Wechselwirkungen zwischen Bestimmungsgrößen und Bedingungsgefüge und implementiert eine große Wahrhaftigkeit der Voraussagen. Wahrsager täuschen deswegen ein Bedingungsgefüge vor: Spielkarten, Kristallkugeln, Handlinien usw.<sup>26</sup> Die langfristige Planung wirtschaftlicher Bestimmungsgrößen setzt eine ausreichende Anzahl an Vergangenheitsdaten voraus, damit *erstens* das Entwicklungsgesetz der Erscheinung und *zweitens* die Wirkung des Bedingungsgefüges auf unternehmerische Zielentscheidungen hinreichend bekannt sind, wie z.B. Stand der Arbeits- und Kapitalproduktivität, marktwirtschaftliche Stellung des Unternehmens. Bei der Extrapolation des Trends wird ein zukünftiges inneres Bedingungsgefüge unterstellt, wie z.B. geplantes organisches Wachstum, Einführung neuer Produkte und

<sup>26</sup> Die Delphi-Methode bezweckt mit Hilfe ausgewiesener Fachleute das Gleiche. Die Ergebnisse überzeugen, weil ein Trend mit Chancen und Risiken [Streuungen] gewonnen wird. Einigen behagten die Streuungen nicht mehr, sie wollten Gewissheit. Die schriftliche Delphi-Methode mit mehrstufiger Rückkopplung der Zwischenergebnisse an die Befragten soll die Abweichungen verringern, der letzte Schritt zum Orakel war getan, beseitigt war die unverzichtbare Aussage über die systematisch ansteigenden künftigen Chancen und Risiken durch die von störender Streuung befreite Trendaussage und die Erkenntnis, dass Störungen sich mit unbekannter Ursache vollziehen und Zufälle ohne tatsächliche, erkennbare oder irgendwie bewusst bewirkte Ursachen auftreten und grundsätzlich sich der Prognoserechnung entziehen.

Technologien, verstärkte Anwendung informationstechnischer Verfahren. Die Abschätzung der Einwirkungen des künftigen äußeren Bedingungsgefüges ist schwieriger: Wie entwickeln sich die Wettbewerbsbedingungen auf den Absatz-, Beschaffungs- und Kapitalmärkten, welche Innovationen liefert die Forschung, welche Strategien wendet die Konkurrenz an? Diese ungewissen Einflüsse treten nicht zufallsabhängig auf, aber verursachen größere Abweichungen vom Trend: Die Spannbreite der Abweichungen vom Trend wächst mit der Länge der Vorausschau, wie z.B. bei der Vorausschau der Entwicklung des Eigenkapitals.

Der Trend des Kapitals  $y(t)$  gehorcht i. Allg. einer aus der Datenanzahl  $y_i$  approximierten Exponentialfunktion (Gesetz des organischen Wachstums<sup>27</sup>, Oppitz, 2011/1, S.212/213) mit den Parametern  $y_0$  (Basisstand),  $\kappa$  (Exponent). Für die Bestimmung der Werte der Funktionsparameter  $y_0, \kappa$  werden  $m = 2$  Bestimmungsgrößen benötigt. Die Datenanzahl  $n$  abzgl. der Parameteranzahl  $m$  bezeichnen den Freiheitsgrad  $f = n - m$  im Streuungsterm  $\sigma$  des Trends<sup>28</sup>:

$$y(t) = y_0 \cdot e^{\kappa t}, \quad [y_0, \kappa] \equiv \sum_{i=1}^n (y(t_i) - y_i)^2 \rightarrow \text{Min!}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-2} \cdot \sum_{i=1}^n (y(t_i) - y_i)^2}$$

Kann der bisherige Trend  $y(t)$  des Eigenkapitals extrapoliert werden? Die Begründung beruht auf der Hypothese: Das erkannte Entwicklungsgesetz entfaltet volle Zukunftswirkung der Stabilität des inneren Bedingungsgefüges und der langjährigen Beständigkeit des bisherigen Trends wegen! Das bedeutet, die Werte der Funktionsparameter  $[y_0, \kappa]$  werden verwendet. Es wird davon ausgegangen, dass die Hypothese der Trendextrapolation widerspruchsfrei ist!

Wie ist es um die Standardabweichung bestellt, taugt ihre bisherige Entwicklung für die Extrapolation in die Zukunft? Bereits aus logischen Gründen ist diese Hypothese abzulehnen! Das zeigt die Betrachtung des Freiheitsgrades in der Formel der Standardabweichung. Denn keinem der extrapolierten Funktionswerte steht eine Bestimmungsgröße gegenüber aber jeder extrapolierte Funktionswert verbraucht – wie bereits bei der Bestimmung der Werte der Funktionsparameter – eine Bestimmungsgröße. Aus der Formel der Standardabweichung  $\sigma$  der quadrierten Abstände zwischen bisherigem Trend  $y(t_i)$  und Bestimmungsgrößen  $y_i$  ergibt sich aus der Betrachtung des Freiheitsgrades  $f$ , dass die im Analysenbereich als statisch wirkende Größe im Prognosebereich zu dynamisieren ist, weil die Extrapolation der Streuung von Schritt zu Schritt eine Bestimmungsgröße verbraucht, bis der Freiheitsgrad die Größe  $f = 1$  erreicht. Der Trend im Prognosebereich besteht aus haltlosen Punkten, der

<sup>27</sup> Der zeitabhängigen Eigenkapitalentwicklung  $y(t)$  liegt ein exponentieller Anstieg organischen Wachstums vor, ausgedrückt durch: „Wo viel ist [y], kommt noch mehr hinzu [dy/dt]!“

<sup>28</sup> Die Kapitaldaten sind erforderlich, um die Entwicklungstendenz zu erfassen ( $\alpha = 0,01805 \rightarrow$  Renditesatz  $p = 1,82\%/a$ ) einschließlich der bis zur Gegenwart reichenden messbaren Streuung (Abb. 22).

Vorrat an Analysedaten  $n$  abzgl. Funktionsparameter  $m$  ist erschöpft, die Streuung strebt gegen unendlich. Nulltoleranzen sind denkbar, sie verschmelzen mit dem Trend, Unendlich-Toleranzen fehlt jede Trendaussage!

Der Werteverbrauch verringert den Freiheitsgrad  $f$  in der Formel der Standardabweichung: Jeder Prognosewert  $v$  (Anzahl extrapolierte Trendwerte) benötigt eine Verankerung im Analysenbereich. Die Spannweite der Streuung wird mit der Länge der Trendvorausschau breiter (Abb. 22). Das begrenzt den Prognosebereich:  $v \leq 2 \cdot n - m - 1$ . Die für den Analyse- und Prognosezeitraum gültige Formel der Standardabweichung lautet [AJG]:

$$\sigma^2 = \sqrt{\frac{1}{n - m - v} \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - y(t_i))^2} \quad \begin{cases} v = 0, & \text{wenn } m < i \leq n \\ v = i - n, & \text{wenn } n < i < 2 \cdot n - m \end{cases}$$

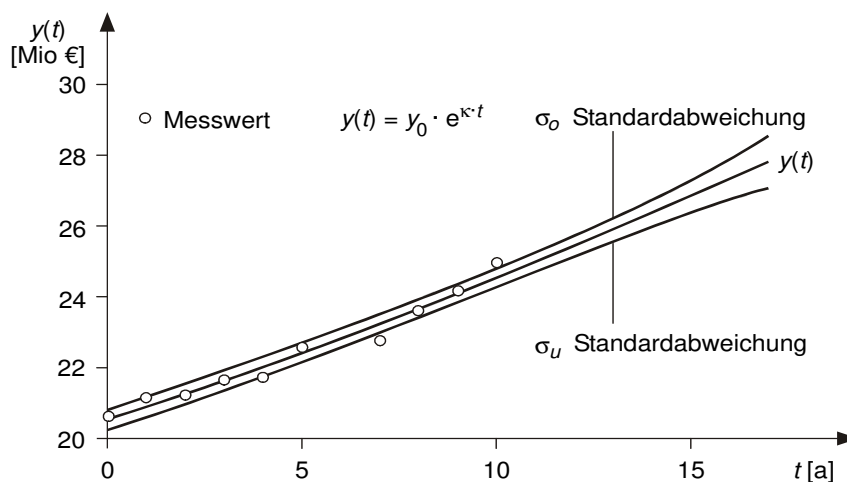


Abbildung 22: Trend des organischen Wachstums des Eigenkapitals mit Toleranzband

### Nachbetrachtung

Die Plausibilität der Verallgemeinerung empirischer Ereignisse durch Approximation mit einer Beteiligungsfunktion verlangt deren wirtschaftsdidaktische Übereinstimmung mit der betrachteten Interaktion. Beteiligungsfunktionen für wirtschaftliche Interaktionen erfordern den Nachweis ihrer Tauglichkeit! Das betrifft die Darstellung ihres Zusammenhangs zu aufgestellten Hypothesen und Thesen. Gesucht wird diejenige, die am besten die Eigenschaften der Interaktionen widerspiegelt und i.d.R. die geringste Standardabweichung aufweist! Es kommt darauf an, den grundsätzlichen Verlauf der Interaktion und der dabei erzeugten Zahlenreihe festzustellen: Ist sie bigradativ, degradativ, progradativ, regradativ oder wird ein Maxi- oder

Minimum gesucht. Allein auf Regressionsanalysen gestützte Hypothesen sind noch kein Plausibilitätsbeweis.

Die passende Beteiligungsfunktion muss den mittleren Interaktionsverlauf (ihren Trend) mit seinen zufälligen, konjunkturellen und saisonalen Schwankungen widerspiegeln. Das erfordert die

- wirtschaftsdidaktische Erklärung der Beteiligungsfunktion und ihrer Parameter,
- Festlegung des  $D_f$  und Wertebereichs der Interaktionen,
- Klärung der Ursachen- und Wirkungsstrukturen zwischen den Variablen.

Auswahlkriterien sind die Erklärung der Interaktionen, die Annäherung der Funktionskurve an das empirische Erscheinungsbild und die kleinste Streuung durch

- *Deduktion*: Finden und Erklären hypothetischer<sup>29</sup> Beteiligungsfunktionen auf der Grundlage verallgemeinerter Gesetzmäßigkeiten wirtschaftlicher Ereignisse. Dieses *deduktive Erlangen* ist die theoretisch beste Vorgehensweise, reale quantitative Beziehungen abzubilden und nützliche Berechnungen durchzuführen.
- *Induktion*: Exploration<sup>30</sup> der Beteiligungsfunktion im Ergebnis der Analyse wirtschaftlicher Interaktionen und ihrer Bestimmungsgrößen. Die wirtschaftsdidaktische Verallgemeinerung geht über die bloße Berechnung hinaus, wenn es gelingt, bestehende wirtschaftliche Gesetzmäßigkeiten zu erhärten oder neue zu gewinnen. Denn „... die Mathematik im Entstehen erscheint als experimentelle *induktive Wissenschaft*“ (Polya, S.9).

I. Allg. ist festzustellen, dass bei wirtschaftlichen Interaktionen symmetrisch verteilte Bestimmungsgrößen selten auftreten: I.d.R. überwiegen asymmetrische Verteilungen mit endlich bestimmten  $D_f$ . Hauptursache ist der Wettbewerb auf den Märkten, in der Forschungs- und Entwicklung und in der Produktion. Das betrifft den Kampf um Spitzenpositionen bei Erneuerungsprozessen, die ständige Minimierung der Kosten der Leistungsprozesse wie bei der Güterbeschaffung, die Konkurrenzkämpfe um Maximalgewinne beim Verkauf der Produkte und die Verdrängungsstrategien zur Erhaltung bestehender und Gewinnung neuer Märkte.

Bei Interaktionsanalysen stellt sich heraus, dass das Wettbewerbsgeschehen nicht die Mitte einer Leistungsskala als Erfolg anerkennt, sondern dass es immer wieder beste Zielergebnisse verlangt und erzeugt, die dem Durchschnitt mit nachhinkenden Leistungsgrößen übertreffen.

Der treibende Impuls menschlichen Leistungswillens wirkt seit eh und je in der belebten Natur und besonders in der Wirtschaft. Es führt zu einer Antriebsfunktion, die i.d.R. eine linkssteile Verteilung der Interaktionsergebnisse des Einzelnen, der Gruppe und der Unternehmung verursacht: Der Wettbewerb sorgt dafür, dass Rechtssubjekte (natürliche und juristische Personen) mit Spitzenleistungen eine Vorzugsstellung im Wirtschaftsleben einnehmen.

---

<sup>29</sup> Wie Modellgewinnung aus den Gesetzen des organischen Wachstums, des Lernens und Rationalisierens usw.

<sup>30</sup> Wie Modellgewinnung z.B. durch stufenweises Anpassen theoretischer Verteilungen an empirische durch Übernahme von Beteiligungsfunktionen aus ähnlichen oder gleichen Interaktionen.

### *Danksagung*

Der Abfassung des Beitrages liegen wichtige Erkenntnisse aus der Zusammenarbeit mit Herrn Prof. Dr. rer. nat. Volker Nollau zu Grunde; eine ebenso wertvolle Hilfe leisteten weitere inhaltliche Hinweise der Herren Professor Dr. rer. oec. habil. Lothar Wunderlich und Professor Dr. sc. oec. Werner Weichelt. Ihnen gilt mein großer Dank ebenso wie meiner Frau Dipl.-Ing. (FH) Ingrid Oppitz, die sämtliche als Entwurf vorliegenden Bilder, Formeln und Texte in der nun vorliegenden Form veröffentlichungsreif gestaltet hat. Sollten sich aller Sorgfalt zum Trotz inhaltliche oder andere Fehler zeigen, bitte ich freundlich darum, mir diese mitzuteilen.

### *Literatur*

- [1] Kimmerle H. Modelle der materialistischen Dialektik. Den Haag, 1978
- [2] Kirsch/Führer. Wirtschaftsmathematik. Herne, 2014
- [3] Krolikowski B. Grundlagen Six Sigma – Was steckt dahinter? In: *Management*. Dresden, 2007. S.15/25
- [4] Lichtenberg G Ch. Aphorismen, Essays, Briefe. Leipzig, 1963
- [5] Luderer/Nollau/Vetters. Mathematische Formeln für Wirtschaftswissenschaftler. Leipzig, 1998
- [6] Michel/Torspecken. Grundlagender Kostenrechnung, Kostenrechnung I. München Wien, 1989
- [7] Nollau/Oppitz. Taschenbuch der Wirtschaftlichkeitsrechnung. München Wien, 2003
- [8] Oppitz V. Die Verteilung des Arbeitsaufwandes in der Produktionszeit. In: *Deutsche Flugtechnik*, Heft 4/1964
- [9] Oppitz V. Betriebsökonomisches Lexikon: Unternehmensstatistik. Berlin, 2011/1
- [10] Oppitz V. Betriebsökonomisches Lexikon: Wirtschaftsmathematik. Berlin, 2011/2
- [11] Oppitz V. Eugen-Sänger-Impuls – Ein Beitrag zur mathematischen Serienplanung. In: Schriften der Sudetendeutschen Akademie der Wissenschaften und Künste, Band 34, Forschungsbeiträge der Naturwissenschaftlichen Klasse. München, 2014
- [12] Polya G. Schule des Denkens. Tübingen, 2010
- [13] Presseartikel: Die Angst vor guten Noten. Frankfurter Rundschau. 18.08.2008.
- [14] Preuß/Wenisch. Mathematik in Wirtschaft und Finanzwesen, München, Wien, 1998
- [15] Sahner H. Schließende Statistik. Eine Einführung für Sozialwissenschaftler. Wiesbaden, 2002
- [16] Schmalenbach E. Kostenrechnung und Preispolitik. Köln und Opladen, 1963
- [17] Schnieder L. Betriebsplanung im öffentl. Personennahverkehr. Berlin, Heidelberg, 2015
- [18] Tillmanns H. Gespräch mit CARDIOVASC in Circulation 110 (2004)
- [19] Wollenberg K (Hg.). Taschenbuch der Betriebswirtschaft. München, Wien, 2000